Семинар 01. Динамика поступательного движения

Задача 1.01. Материальная точка массой m движется вдоль оси X и в начальный момент времени скорость точки равна v_{x_0}. На материальную точку действует сила: $F_x = -\alpha v_x$. Найти зависимости скорости и координаты точки от времени.

Решение:
$m\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = -\alpha V_x$, то есть $\frac{\mathrm{d}V_x}{V_x} = \frac{-\alpha}{m}\mathrm{d}t$, интегрируем: $\int \frac{\mathrm{d}V_x}{V_x} = \int \frac{-\alpha}{m}\mathrm{d}t$ и получаем $\ln V_x - \ln V_{x_0} = \frac{-\alpha}{m}t$, то есть $\boxed{V_x(t) = V_{x_0}e^{\frac{-\alpha}{m}t}}$ и $\boxed{x(t) = \frac{mV_{x_0}}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha}{m}t}\right)}$

Задача 1.02. Тело массой m находится в гравитационном поле планеты массой M и радиусом R_0. Пользуясь определением механической работы, найти зависимость потенциальной энергии тела от расстояния до центра планеты R. Закон всемирного тяготения:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

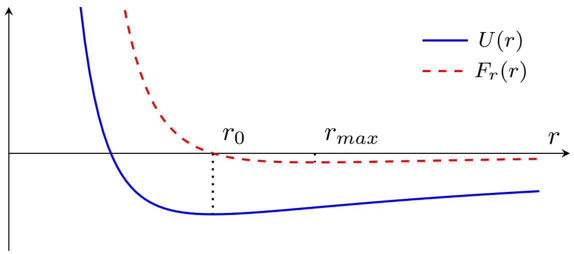
Решение:

$$\Delta U = A = \int_{R_0}^{R} G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = GMm\int_{R_0}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = GMm\left(-\frac{1}{r}\bigg|_{R_0}^{R}\right) = \boxed{\frac{GMm}{R_0} - \frac{GMm}{R}}$$

Задача 1.03. Потенциальная энергия частицы в некотором поле имеет вид $U = a/r^2 - b/r$, где a и b — положительные постоянные, r — расстояние от центра поля.

a) Найти максимальное значение силы притяжения; изобразить примерные графики зависимостей $U(r)$ и $F_r(r)$;
b) Найти значение r_0 соответствующее равновесному положению частицы; выяснить, устойчиво ли это положение.

Решение:
$U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$, так как $F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$, то $F = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}$, так как $F < 0$, получаем, что $r < \frac{2a}{b}$. Максимум в $F' = 0$: $-\frac{6a}{r^4} + \frac{2b}{r^3} = 0$, $r = \frac{3a}{b}(> \frac{2a}{b})$.



а) $\boxed{F = -\frac{b^3}{27a^2}}$

б) $F = 0$, то есть $\frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2} = 0$, $\boxed{r = \frac{2a}{b}}$, если положение устойчиво, $U'' > 0$, то есть $\frac{6b^4}{16a^3} - \frac{2b^4}{8a^3} = \frac{2b^4}{16a^3} > 0$, так как $a, b > 0$

Задача 1.04. Частица массой m движется в плоскости XY в некотором потенциальном поле. Потенциальная энергия этой частицы имеет следующую зависимость от координат:

$$U_p = m(\alpha x^2 + \beta y^2)$$

(α и β — некоторые положительные постоянные). Найти силу (в виде вектора), действующую на частицу, когда она находится в точке с координатами (x_0, y_0).

Решение: $U_p = m(\alpha x^2 + \beta y^2)$, тогда $F = -(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}, \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j})$, или $\boxed{\vec{F} = -(2\alpha m x_0, 2\beta m y_0)}$

Задача 1.05. Ракета массой M заправлена m_0 кг топлива. Найти скорость ракеты после того, как будет израсходовано Δm кг топлива. Скорость истечения продуктов сгорания относительно ракеты u_0.

Решение:
По закону сохранения импульса изменение скорости связано с выбросом массы $\mathrm{d}m$ уравнением Мещерского: $m\mathrm{d}v = -u_0\mathrm{d}m$. Интегрируем от начального состояния ($v_0 = 0$, масса $m_1 = M + m_0$) до конечного (v, масса $m_2 = M + m_0 - \Delta m$):$\int_0^v \mathrm{d}v = -u_0\int_{m_1}^{m_2}\frac{\mathrm{d}m}{m}$. Вычисляя интеграл, получаем $v = -u_0 \ln m\Big|_{m_1}^{m_2} = -u_0\ln\left(\frac{M+m_0-\Delta m}{M+m_0}\right)$. Получаем:

$$\boxed{v = u_0\ln\left(\frac{M+m_0}{M+m_0-\Delta m}\right)}.$$

Задача 1.11. Пользуясь определением механической работы, найти интегрированием потенциальную энергию пружины жесткостью k при её растяжении на Δx. Сила упругости зависит линейно от растяжения: $F = k\Delta x$.

Решение:
$A = \int_0^{\Delta x} F(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\Delta x} kx\mathrm{d}x = k\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\Delta x} = k\frac{\Delta x^2}{2}$, то есть $\boxed{U = A = \frac{k\Delta x^2}{2}}$

Задача 1.12. Частица движется вдоль оси x под действием силы $F_x = \alpha x - \beta x^2$, где $\alpha = 8,0$ Н/м, $\beta = 6,0$ Н/м^2. Найти координату x_0 точки, в которой потенциальная энергия частицы такая же, как в точке $x = 0$.

Решение:
$F_x = \alpha x - \beta x^2$, а так как $F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$, $\mathrm{d}U = -F_x\mathrm{d}x$ и $U = \int\mathrm{d}U$:

$$U = -\int_0^{-x}(\alpha x - \beta x^2)\mathrm{d}x = \frac{\beta x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2}; U(x_0) = \frac{\beta x_0^3}{3} - \frac{\alpha x_0^2}{2}$$

$U(x) = 0$: $\frac{\beta x}{3} - \frac{\alpha}{2} = 0$, тогда $\boxed{x_0 = \frac{3\alpha}{2\beta} = \frac{3\cdot 8}{2\cdot 6} = 2\text{м}}$

Задача 1.13. Частица находится в двумерном силовом поле, где ее потенциальная энергия $U = -\alpha xy$, $\alpha = 6,0$ Дж/м^2. Найти модуль силы, действующей на частицу в точке с координатами $x = 0,5$ мм, $y = 1,5$ мм.

Решение:
$U = -\alpha xy$, используя $F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = (\alpha y, \alpha x)$, тогда $|F| = \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$.

$\boxed{F(x_0, y_0) = 6\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{0.5^2 + 1.5^2} \approx 9.5\text{мН}}$

Задача 1.14. Астероид массой m движется в поле тяжести звезды массой M. Используя формулу для потенциальной энергии в поле тяжести:

$$U = -G\frac{Mm}{r}$$

найти силу, действующую на астероид, когда он находится в точке с координатами (x, y, z).

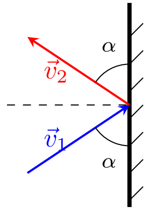
Решение: (Задача 1.14)
$U=-G\frac{Mm}{r}$, $F=-\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)=\left(\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{x},\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{y},\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{z}\right)$, тогда

$$\boxed{F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=G\frac{Mm}{r^3}|\vec{r}|=G\frac{Mm}{r^2}}$$

Задача 1.15. Частица массой m движется со скоростью $\vec{v}$ и сталкивается с неподвижной стенкой, масса которой много больше массы частицы (т.е. после соударения можно считать, что стенка осталась неподвижной). Определить изменение импульса частицы в случае:

1. если частица «прилипает» к стенке;
2. частица соударяется со стенкой абсолютно упруго и отскакивает (учесть, что изначально частица может лететь не перпендикулярно к стенке, а под углом α).

Решение:
1) Если частица «прилипает» (неупругий удар), конечная скорость равна нулю. Изменение импульса: $\Delta\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=0-m\vec{v}=-m\vec{v}$. Модуль изменения: $|\Delta\vec{p}|=mv$.



2) При упругом ударе модуль скорости сохраняется ($v_1=v_2=v$), угол падения равен углу отражения. В проекции на ось, параллельную стенке, импульс не меняется ($\Delta p_{\parallel}=0$). В проекции на нормаль к стенке (ось $\perp$):

$$\Delta p_{\perp}=-mv\sin\alpha-mv\sin\alpha=-2mv\sin\alpha$$

Модуль изменения: $|\Delta\vec{p}|=2mv\sin\alpha$.

Задача 1.16. Какую мощность развивают двигатели ракеты массы M, которая неподвижно висит над поверхностью планеты (ускорение свободного падения для которой равно g), если скорость истечения газов равна u?

Решение:
$F_{\text{т}}=\mu u$, $\mu u=Mg$, то есть $\mu=\frac{Mg}{u}$, так же знаем, что $E_{\text{к}}=\frac{\Delta m u^2}{2}$ и $\mu=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, тогда:
$P=\frac{\mathrm{d}E_{\text{к}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}mu^2}{\mathrm{d}t\cdot 2}=\frac{\mu u^2}{2}=\frac{Mgu^2}{2u}=\boxed{\frac{Mgu}{2}}$

Семинар 02. Кинематика и динамика вращательного движения

Задача 2.01. Для изучения вращательного движения используют прибор Обербека, представляющий собой крестовину с закрепленными на ней грузиками. Крестовина приводится во вращение с помощью нити, намотанной на шкив. Считая грузики материальными точками, а крестовину и шкив невесомыми, найти угловое ускорение системы, если нить тянут с силой F. Взять массу m каждого грузика $0,5$ кг. Считать, что все грузики расположены на одинаковом расстоянии R от оси, равном 30 см. Радиус шкива r_0 взять 10 см. Сила F, с которой тянут нить, взять равной 10 Н.

Решение:
$I=4mR^2$, $Fr_0=M=I\varepsilon$, то есть $\boxed{\varepsilon=\frac{Fr_0}{4mR^2}}$

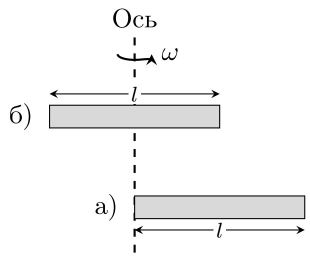
Задача 2.02. Решить задачу 2.01, но считать, что система раскручивается за счет веса груза массой 1 кг, подвешенного на конце нити, намотанной на шкив. (Если груз движется с ускорением, сила натяжения нити уже не будет равна весу груза.)

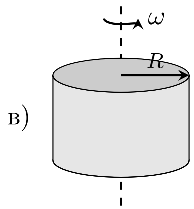
Решение:
$m_{\text{г}}a=m_{\text{г}}g-T$, $a=\varepsilon r_0$, при этом из прошлой задачи $Tr_0=I\varepsilon$, подставим величины:

$$m_{\text{г}}\varepsilon r_0=m_{\text{г}}g-\frac{I\varepsilon}{r_0}\implies\boxed{\varepsilon=\frac{m_{\text{г}}r_0g}{m_{\text{г}}r_0^2+4mR^2}}$$

Задача 2.03. а) Интегрированием найти момент инерции однородного стержня длиной l и массой m относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. б) Найти момент инерции для этого же стержня, но относительно оси, проходящей через центр масс стержня перпендикулярно стержню. в) Найти момент инерции сплошного цилиндра массой m и радиусом R, относительно оси, совпадающей с осью симметрии цилиндра.

Решение:





Для стержня введем линейную плотность $\lambda=\frac{m}{l}$, тогда масса малого элемента $\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\mathrm{d}x$. По определению: $I=\int x^2\mathrm{d}m$.

а) Ось на конце (пределы интегрирования от 0 до l):

$$I=\int_0^l x^2\frac{m}{l}\mathrm{d}x=\frac{m}{l}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^l=\boxed{\frac{ml^2}{3}}$$

б) Ось в центре (пределы от $-l/2$ до $l/2$):

$$I=\int_{-l/2}^{l/2}x^2\frac{m}{l}\mathrm{d}x=\frac{m}{l}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-l/2}^{l/2}=\boxed{\frac{ml^2}{12}}$$

в) Цилиндр разобьем на полые цилиндрические слои радиуса r, толщины $\mathrm{d}r$ и высоты h. Их объем $\mathrm{d}V=2\pi rh\mathrm{d}r$, а масса слоя:

$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\frac{m}{\pi R^2h}\cdot 2\pi rh\mathrm{d}r=\frac{2m}{R^2}r\mathrm{d}r$$

Интегрируем от оси к краям (от 0 до R):

$$I=\int_0^R r^2\left(\frac{2m}{R^2}r\right)\mathrm{d}r=\frac{2m}{R^2}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R=\boxed{\frac{mR^2}{2}}$$

Задача 2.04 Теорема Штейнера. а) Используя теорему Штейнера и результат решения задачи 2.03(б), найти момент инерции стержня для оси, проходящей через его конец, как в задаче 2.03(а). Убедиться, что результат совпадает с результатом, полученным прямым интегрированием в задаче 2.03(а). б) Решить задачу 2.01, считая, что грузики представляют собой сплошные шары радиусом 5 см, закрепленные на концах стержней.

Решение:
а) $I=I_c+mr_0^2$, тогда $I=\frac{ml^2}{12}+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{ml^2}{3}$
б) $I_{\text{шар}}=\frac{2}{5}mr_{\text{ш}}^2$, $I_1=I_{\text{шар}}+mR^2=m\left(\frac{2}{5}r_{\text{ш}}+R^2\right)$, $I_{\text{все}}=4I_1=4m\left(\frac{2}{5}r_{\text{ш}}+R^2\right)$
Тогда $\boxed{\omega=\frac{Fr_0}{I_{\text{все}}}=\frac{Fr_0}{4m(R^2+0.4r_{\text{ш}}^2)}}$

Задача 2.05. Представим себе, что прибор Обербека из задачи 2.01 снабжен невесомым механизмом, позволяющим прямо в процессе вращения перемещать грузики вдоль стержней. Предположим, что крестовина с грузиками, расположенными на расстоянии 30 см от оси вращения, равномерно вращается без трения с частотой ν_1. Найти ν_2 крестовины, если грузики переместить на расстояние 50 см от оси вращения.

Решение:

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, $\omega_1 = 2\pi\nu_1$ и $\omega_2 = 2\pi\nu_2$. Тогда $I_1 = 4mR_1^2$, а $I_2 = 4mR_2^2$, таким образом

$$\boxed{\nu_1 = \nu_2 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} \Longleftrightarrow \nu_2 = \nu_1 \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2}}$$

Домашнее задание 02

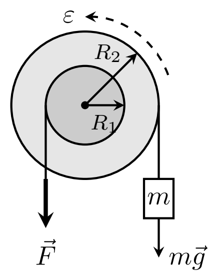
Задача 2.11. Решить задачу 2.01, считая теперь, что стержни имеют длину, равную 0.5 м и массу 0.1 кг каждый, масса шкива также равна 0.1 кг.

Решение:

$M = Fr_0 = I\varepsilon$, $I_{\text{общ}} = 4mR^2 + \frac{4m_c l^2}{3} + \frac{mr_0^2}{2}$. То есть $\boxed{\varepsilon = \dfrac{Fr_0}{4mR^2 + 4m_c l^2/3 + mr_0^2/2}}$

Задача 2.12. На ступенчатый блок намотаны в противоположных направлениях две нити. На конец одной нити действуют постоянной силой $\vec{F}$, а к концу другой нити прикреплен груз массы m. Известны радиусы R_1 и R_2 блока и его момент инерции I относительно оси вращения. Трения нет. Найти угловое ускорение блока.

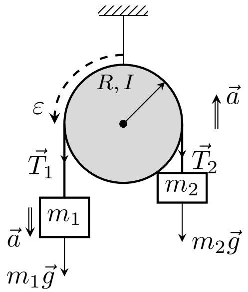
Решение:



Запишем второй закон Ньютона для груза:
$ma = mg - T$, и вспомним, что $a = \varepsilon R_2$, из вращательного движения. Тогда справедливо равенство $T = m(g - \varepsilon R_2)$.
$TR_2 - FR_1 = I\varepsilon$, тогда подставляя T получаем:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{mR_2 g - FR_1}{I + mR_2^2}}$$

Задача 2.13. Через блок радиусом R и моментом инерции I перекинута нить с двумя грузиками массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$). Найти ускорения грузиков и угловое ускорение блока. Считать, что нить не проскальзывает, трения в оси блока нет.



Запишем второй закон Ньютона 2 раза и момент силы

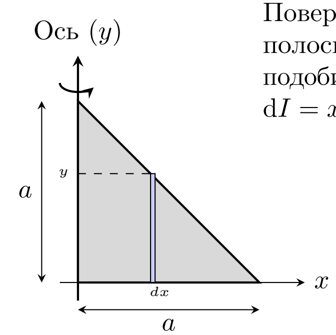
$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \\ (T_1 - T_2)R = I\varepsilon \end{cases}, \text{ тогда } \begin{matrix} T_1 = m_1(g - a) \\ T_2 = m_2(g + a) \\ a = \varepsilon R \end{matrix}$$

$(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a = \frac{Ia}{R^2}$. Тогда можно записать ответ:

$$\boxed{a = \frac{(m_1 - m_2)gR^2}{(m_1 + m_2)R^2 + I}}, \quad \boxed{\varepsilon = \frac{(m_1 - m_2)gR}{(m_1 + m_2)R^2 + I}}$$

Задача 2.14. Тонкая однородная пластинка массы 0.6 кг имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти её момент инерции относительно оси, совпадающей с одним из катетов, длина которого $a = 0.2$ м.

Решение:



Поверхностная плотность пластинки: $\sigma = \frac{m}{S} = \frac{2m}{a^2}$ Выберем полоску шириной $\mathrm{d}x$ на расстоянии x от оси. Ее высота из подобия: $y = a - x$. Масса полоски: $\mathrm{d}m = \sigma y \mathrm{d}x = \frac{2m}{a^2}(a - x)\mathrm{d}x$
$\mathrm{d}I = x^2 \mathrm{d}m$ Интегрируем от 0 до a:

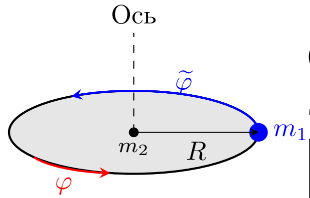
$$I = \int_0^a x^2 \frac{2m}{a^2}(a - x)dx = \frac{2m}{a^2}\int_0^a (ax^2 - x^3)dx$$

$$I = \frac{2m}{a^2}\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2m}{a^2}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right)$$

$$I = \frac{2m}{a^2} \cdot \frac{a^4}{12} = \boxed{\frac{ma^2}{6}}$$

Задача 2.15. Человек массы m_1 стоит на краю горизонтального однородного диска массы m_2 и радиуса R, который может свободно вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска, совершил перемещение на угол $\widetilde{\varphi}$ относительно диска и остановился. Пренебрегая размерами человека, найти угол, на который повернулся диск к моменту остановки человека.

Решение:

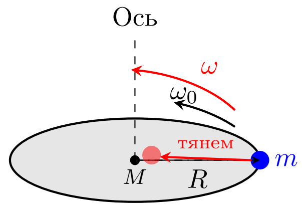


$\widetilde{\omega} = \omega_{\text{чел}} - \omega_{\text{диск}}$. $I_{\text{чел}} = m_1R^2$, $I_{\text{диск}} = m_2R^2/2$.
Система замкнута, внешние моменты сил отсутствуют ($\sum \vec{M}_{\text{вн}} = 0$), значит закон сохранения момента импульса:
$I_{\text{чел}}\omega_{\text{чел}} + I_{\text{диск}}\omega_{\text{диск}} = 0 \Leftrightarrow m_1\cancel{R^2}(\omega_{\text{диск}} + \widetilde{\omega}) + \frac{1}{2}m_2\cancel{R^2}\omega_{\text{диск}} = 0$
То есть $\omega_{\text{диск}}(m_1 + \frac{m_2}{2}) = -m_1\widetilde{\omega}$, значит $\varphi(m_1 + \frac{m_2}{2}) = -m_1\widetilde{\varphi}$

$$\boxed{\varphi = \frac{-m_1\widetilde{\varphi}}{m_1 + \frac{m_2}{2}}}$$

Задача 2.16. Горизонтально расположенный однородный диск массы M и радиуса R свободно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Диск имеет радиальную направляющую, вдоль которой может скользить без трения небольшое тело массы m. К телу привязана нить, пропущенная через полую ось диска вниз. Первоначально тело находится на краю диска и вся система вращается с угловой скоростью ω_0. Затем, потянув за нить, тело медленно подтянули к оси вращения. Найти: 1) угловую скорость системы в конечном состоянии; 2) работу, которую совершили, когда тянули нить.

Решение:



$I_{\text{до}} = \frac{MR^2}{2} + mR^2$, $I_{\text{после}} = \frac{MR^2}{2}$, так как тело находится на расстоянии 0 от оси. По закону сохранения момента импульса:
$I_{\text{до}}\omega_{\text{до}} = I_{\text{после}}\omega_{\text{после}}$, то есть

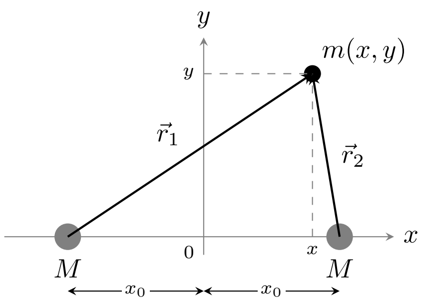
$$\boxed{\omega_{\text{после}} = \omega_{\text{до}}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)} \text{ и } \boxed{A = \frac{1}{2}R^2\omega_{\text{до}}m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

@K1o0n

Семинар 03. Вращательное движение (продолжение)

Задача 3.01. Астероид массой m движется в гравитационном поле двух одинаковых звезд массой M, каждая из которых находится на расстоянии x_0 от начала координат. Найти потенциальную энергию астероида в зависимости от его координат (x, y).

Решение:



$$U(x,y) = U_1 + U_2 = -G\frac{Mm}{r_1} - G\frac{Mm}{r_2}$$

$$U(x,y) = -GMm\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Из картинки:

$$r_1 = \sqrt{(x-(-x_0))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+x_0)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{-GMm}{\sqrt{(x+x_0)^2+y^2}} + \frac{-GMm}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}}}$$

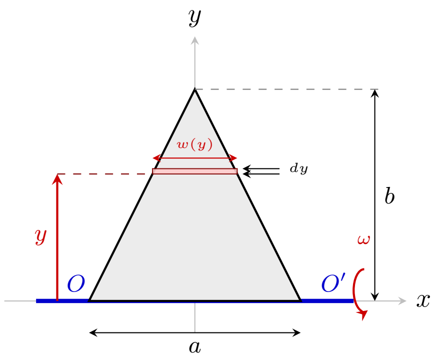
Задача 3.02. Колесо радиусом 0.5 м вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0.2$ рад/с^2. Найти полное ускорение точки на ободе колеса в момент времени $t = 2.5$ с.

Решение:

$\overrightarrow{a_{\text{полн}}} = \vec{a_\tau} + \vec{a_n}$, $\omega = 2\beta t$, тогда $\varepsilon = 2\beta$. $a_n = \omega^2 R$, $a_\tau = \epsilon R$. Тогда полное ускорение равно: $\boxed{|a_{\text{полн}}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2}} = 0.5 \cdot \sqrt{1^4 + 0.4^2} \approx 0.5385$

Задача 3.03. Найти момент инерции плоской фигуры в виде равнобедренного треугольника с основанием a, высотой b и массой m относительно оси OO'.

Решение:



Поверхностная плотность: $\sigma = \frac{2m}{ab}$. Из подобия малого верхнего и всего большого треугольников:

$$\frac{w(y)}{a} = \frac{b-y}{b} \implies w(y) = a\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

Масса этой полоски:

$$\mathrm{d}m = \sigma w(y)\mathrm{d}y = \frac{2m}{b}\left(1 - \frac{y}{b}\right)\mathrm{d}y$$

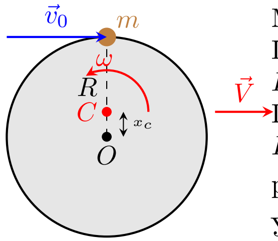
Момент инерции полоски $\mathrm{d}I = y^2 \mathrm{d}m$. Интегрируем от оси по всей высоте (от 0 до b):

$$I = \int_0^b y^2 \frac{2m}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right)\mathrm{d}y = \frac{2m}{b}\int_0^b \left(y^2 - \frac{y^3}{b}\right)\mathrm{d}y$$

$$I = \frac{2m}{b}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4b}\right)\Big|_0^b = \frac{2m}{b}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{4}\right) = \frac{mb^2}{6}$$

Задача 3.04. Астероид массой m, летящий со скоростью v_0, направленной по касательной к краю планеты массой M, попадает в край планеты и застревает. Найти скорости поступательного и вращательного движения планеты после столкновения.

Решение:



Удар абсолютно неупругий: $mv_0 = (M+m)V \implies \boxed{V = \frac{mv_0}{M+m}}$.

Смещение ЦМ (точка C) от центра планеты O: $x_c = \frac{mR}{M+m}$.

Момент инерции новой системы относительно ЦМ (по теореме Штейнера для планеты):

$I_c = \left(\frac{2}{5}MR^2 + Mx_c^2\right) + m(R - x_c)^2 = \frac{2}{5}MR^2 + \frac{mM}{M+m}R^2$.

По закону сохранения момента импульса относительно ЦМ: $L = I_c\omega$. Плечо начального импульса mv_0 относительно C равно $(R - x_c) = \frac{MR}{M+m}$. $mv_0\frac{MR}{M+m} = R^2\left(\frac{2}{5}M + \frac{mM}{M+m}\right)\omega$.

Умножив обе части на $\frac{M+m}{MR}$, получим: $mv_0 = R\left(\frac{2}{5}(M+m)+m\right)\omega = \frac{R}{5}(2M+7m)\omega$. Откуда угловая скорость вращения планеты: $\boxed{\omega = \frac{5mv_0}{R(2M+7m)}}$.

Домашнее задание 03

Задача 3.11. Поток фотонов с интенсивностью 10^4 фотонов в секунду падает перпендикулярно на пластинку с коэффициентом отражения 30%. Считая, что импульс одного фотона p_0, найти силу давления света на эту пластинку.

Решение:

0.7 поглощаются и дают p_0, 0.3 отскакивают и дают $2p_0\sin(90°) = 2p_0$, тогда

$F = N(0.7p_0 + 0.3 \cdot 2p_0) = \boxed{1.3p_0 \cdot 10^4}$

Задача 3.12. Частица 1 массой m_1 столкнулась с частицей 2 массой m_2, в результате чего возникла составная частица. Найти ее скорость $\vec{v}$, если скорости перед столкновением были $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\vec{v}_2 = 4\vec{i} - 5\vec{j}$ (компоненты скоростей в м/с).

Решение:

Запишем закон сохранения импульса: $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}$, тогда $\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$, тогда $\boxed{v = \left(\frac{2m_1 + 4m_2}{m_1+m_2}, \frac{3m_1 - 5m_2}{m_1+m_2}\right)}$

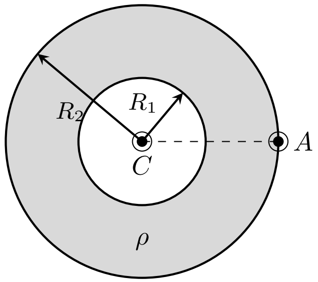
Задача 3.13. Тонкая однородная пластина массой 0.5 кг имеет форму прямоугольника со сторонами 100 мм и 200 мм. Найти момент инерции пластины относительно оси, совпадающей с короткой стороной пластины.

Решение:

Из задачи 2.03(a) мы знаем момент инерции для стержня, такую пластинку можно разбить на стержни, а все такие стержни с центром на оси, поэтому при интегрировании моменты инерции складываются. То есть $\boxed{I = \frac{mb^2}{3}}$.

Задача 3.14. Внутри цилиндра радиусом R_2 и высотой h имеется полость радиусом R_1. Найти моменты инерции цилиндра относительно оси симметрии цилиндра и оси, параллельный оси симметрии и проходящей через край цилиндра (точка A). Плотность материала, из которого изготовлен цилиндр ρ.

Решение:



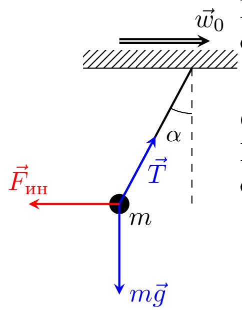
$I_б = \frac{1}{2}M_2R_2^2$, где $M_2 = \rho\pi R_2^2 h$, то есть $I_б = \frac{\rho\pi h}{2}R_2^4$
$I_м = \frac{1}{2}M_1R_1^2$, где $M_1 = \rho\pi R_1^2 h$, то есть $I_м = \frac{\rho\pi h}{2}R_1^4$
$V = \pi(R^2 - R_1^2)h$, $m = \rho V = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)h$
$I = I_б - I_м = \frac{\rho\pi h}{2}(R_2^4 - R_1^2) = \underbrace{\rho\pi h(R_2^2 - R_1^2)}_{m}\frac{R_2^2+R_1^2}{2}$

Мы нашли момент инерции цилиндра через его ось (точку C), теперь по теореме Штейнера найдем через точку A: $\boxed{I = \frac{m}{2}(3R_2^2 + R_1^2)}$

Семинар 04. Неинерциальные системы отсчета

Задача 4.01. Тележка движется с ускорением w_0. На какой угол отклонится грузик?

Решение:



Перейдем в неинерциальную систему отсчета (НИСО), связанную с тележкой. В этой системе на грузик действует сила инерции:

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{w}_0$$

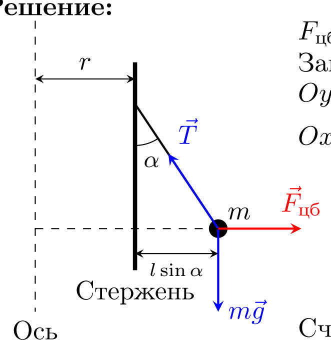
Она направлена в сторону, противоположную ускорению тележки. В НИСО грузик покоится, следовательно, векторная сумма всех сил равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{ин} = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{F_{ин}}{mg} = \frac{mw_0}{mg} = \frac{w_0}{g} \implies \boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{w_0}{g}\right)}$$

Задача 4.02. Вертикальный стержень укреплён на горизонтальном диске, вращающемся с частотой $n = 0.8$ с$^{-1}$. К вершине стержня привязан шарик на нити длиной $l = 0.12$ м. Определите расстояние r от стержня, если угол α нити с вертикалью равен 37°.

Решение:



$F_{цб} = m\omega^2 R$. Радиус вращения шарика: $R = r + l\sin\alpha$.
Запишем условия равновесия в проекциях на оси:
$Oy: T\cos\alpha = mg$
$Ox: T\sin\alpha = F_{цб} = m(2\pi n)^2(r + l\sin\alpha)$

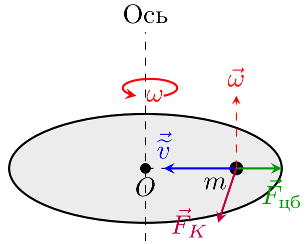
$$\tan\alpha = \frac{4\pi^2 n^2(r + l\sin\alpha)}{g}$$

$$r + l\sin\alpha = \frac{g\tan\alpha}{4\pi^2 n^2} \implies \boxed{r = \frac{g\tan\alpha}{4\pi^2 n^2} - l\sin\alpha}$$

Считаем: $r = \frac{9.8\cdot\tan 37^\circ}{4\pi^2\cdot(0.8)^2} - 0.12\cdot\sin 37^\circ \approx 0.22$ м.

Задача 4.03. Букашка массой 1 г ползет со скоростью 1 см/с вдоль радиуса диска, который вращается со скоростью 10 оборотов в минуту. Какая сила действует на букашку, когда она находится на расстоянии 10 см от оси диска?

Решение:



В горизонтальной плоскости сумма сил равна нулю:

$$\vec{F}_{тр} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_K = 0 \implies \vec{F}_{тр} = -(\vec{F}_{цб} + \vec{F}_K)$$

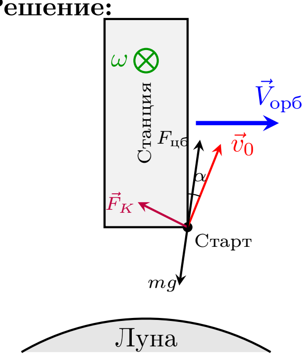
Силы инерции перпендикулярны друг другу: $F_{цб} = m\omega^2 r$, $F_K = 2m\tilde{v}\omega$.

$$F = \sqrt{F_{цб}^2 + F_K^2} = \boxed{m\omega\sqrt{\omega^2 r^2 + 4\tilde{v}^2}}$$

Угловая скорость $\omega = 2\pi n = 2\pi\cdot\frac{10}{60} = \frac{\pi}{3}$.

Задача 4.04. Орбитальная станция в виде цилиндра высотой 600 м и радиусом 30 м вращается вокруг Луны по круговой орбите на высоте 50 км так, что станция всегда ориентирована вертикально. Космонавт, находящийся на краю нижнего торца станции, решил, что ему лень карабкаться по наружной стороне к верхнему торцу. Поэтому он оттолкнулся и полетел, так что в начальный момент времени его скорость равна 5 м/с и направлена под углом 6° к вертикали. Считая силу Кориолиса постоянной по модулю и направлению (это можно делать потому, что вектор скорости космонавта довольно слабо меняется по модулю и направлению), определить, в каком месте космонавт снова коснётся станции (и коснётся ли вообще). С какой стороны станции надо прыгать обратно? Объяснить почему.

Решение:



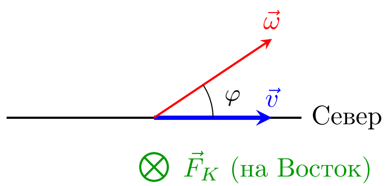
F_K почти перпендикулярна станции, так как угол α довольно маленький, поэтому будем считать задачу баллистики. $m\omega^2(R_m + h) = F_{цб} = mg_m$, то есть $\omega = \sqrt{\frac{g_m}{R_m+h}}$. При этом $F_K = 2m[\vec{v},\vec{\omega}] = 2mv\omega$ Тогда, дальность полета равна по формуле баллистики:

$$\boxed{L = \frac{v^2\sin(2\alpha)}{a_K} = \frac{v^2\sin(2\alpha)}{F_k/m} = \frac{v\sin(2\alpha)}{2\omega} \approx 545.91 \text{ м}}$$

Прыгать обратно нужно с **обратной стороны**, потому что сила Кориолиса будет направлена по направлению скорости станции.

Задача 4.05. Винтовкой выстрелили в вертикальную мишень, находящейся точно в северном направлении. Найти, на сколько сантиметров и в какую сторону пуля, попав в мишень, отклонится от черты. Выстрел произведен в горизонтальном направлении на широте $\varphi = 60°$, скорость пули $v = 900$ м/с, расстояние до мишени $s = 1$ км.

Решение:



$\vec{F}_K = 2m[\vec{v},\vec{\omega}]$, тогда модуль равен $F_K = 2mv\omega\sin\varphi$. Ускорение пули: $a_K = F_K/m = 2v\omega\sin\varphi$. Время полета пули: $t = s/v$.
Отклонение пули (движение равноускоренное):

$$x = \frac{a_K t^2}{2} = \frac{2v\omega\sin\varphi}{2}\left(\frac{s}{v}\right)^2 = \boxed{\frac{\omega s^2\sin\varphi}{v}}$$

Домашнее задание 04

Задача 4.11. Какая сила инерции действует на человека массой 80 кг в кабине лифта, которая начинает двигаться вверх с ускорением 1 м/с^2? Куда направлена эта сила?

Решение:
Перейдем в НИСО связанную с лифтом, тогда сила инерции будет направлена вниз, так как движущая сила в ИСО была направлена вверх, а $\overrightarrow{F_{\text{движ}}} = -\overrightarrow{F_{\text{ин}}}$. Тогда сила будет равна по модулю $80 \cdot 1 = \boxed{80\text{Н}}$.

Задача 4.12. Найти силу инерции, которую испытывает пуговица массой 3 г, находясь у стенки барабана стиральной машины при скорости 1000 оборотов в минуту. Диаметр барабана 50 см.

Решение:
$-\overrightarrow{F_{\text{ин}}} = \overrightarrow{F_{\text{цб}}} = m\omega^2 R$, $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{200\pi}{6} \approx 105$, $R = 0.25$, тогда $F_{\text{цб}} = 0.003 \cdot 105^2 \cdot 0.25 \approx 8.27\text{Н}$, тогда $\boxed{F = -8.27\text{Н}}$

Задача 4.13. Электровоз массой $m = 142$ т движется со скоростью $v = 79$ км/ч на широте $\varphi = 62°$ вдоль меридиана. Определите, чему равна горизонтальная составляющая силы давления на рельсы.

Решение:
$\overrightarrow{F_{\text{цб}}} = m\omega^2\vec{r}$, $\vec{F_K} = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}]$, модуль тогда равен $F_K = 2mv\omega\sin\varphi$, найдем ω, оно на земле равно $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2}$, тогда $\boxed{F_K = \dfrac{mv\pi\sin\varphi}{6 \cdot 60 \cdot 60}} \approx 399.36\text{Н}$.

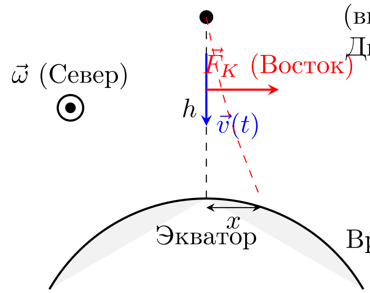
Задача 4.14. В неинерциальной системе отсчета решить следующую задачу (1.179 из задачника Трофимовой): В центре горизонтальной платформы укреплен вертикальный стержень, к вершине которого с помощью нити длиной $l = 15$ см привязан шарик. Определите частоту вращения n платформы, если угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 45°$.

Решение:
Из задачи 4.01, мы знаем, что угол отклонения равен $\alpha = \arctan\frac{F_{\text{цб}}}{mg} = \arctan\frac{\omega^2 l\cos\alpha}{g}$.

Тогда $\alpha = 45°$, значит $\omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha}$, тогда при $\omega = 2\pi n$: $\boxed{n = \sqrt{\dfrac{g}{4\pi^2 l\cos\alpha}}} \approx 1.53$ Гц

Задача 4.15. На экваторе с высоты $h = 500$ м на поверхность Земли падает тело (без начальной скорости относительно Земли). На какое расстояние и в какую сторону отклонится от вертикали тело при падении?

Решение:



При РУ движении $v = gt$. Тогда, сила Кориолиса:
$$\vec{F}_K = 2m[\vec{v}, \vec{\omega}] \implies a_K(t) = 2v(t)\omega = 2gt\omega$$
(вниз × север) = восток сила направлена на **восток**.
Движение происходит с переменным ускорением a_K.
$$v_x(t) = \int_0^t a_K(\tau)d\tau = \int_0^t 2g\omega\tau d\tau = g\omega t^2$$
$$x = \int_0^T v_x(t)dt = \int_0^T g\omega t^2 dt = \frac{1}{3}g\omega T^3$$
Время падения найдем из кинематики: $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$:
$$x = \frac{1}{3}g\omega\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{8h^3}{g}}} \approx 0.24 \text{ м} = 24 \text{ см}$$

Семинар 05. Колебания

Задача 5.01. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия $x = 0$. Частота колебаний $\omega = 4.00$ с$^{-1}$. В некоторый момент координата частицы $x_0 = 25.0$ см и ее скорость $v_{x_0} = 100$ см/с. Найти координату x и скорость v_x частицы через $t = 2.40$ с после этого момента.

Решение:
$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $v = \dot{x} = -A\sin(\omega_0 t + \varphi)\omega_0$, тогда справедлива система:
$\begin{cases} 25 = A\cos(4t_0 + \varphi) \\ 100 = -4A\sin(4t_0 + \varphi) \end{cases}$, получаем, что $\cos(4t_0 + \varphi) = -\sin(4t_0 + \varphi)$ или $4t_0 + \varphi = -\frac{\pi}{4}$.
Тогда $x = \frac{50}{\sqrt{2}}\cos\left(4 \cdot 2.4 - \frac{\pi}{4}\right) \approx \boxed{-29 \text{ см}}$ и $v = -100\sqrt{2}\sin\left(4 \cdot 2.4 - \frac{\pi}{4}\right) \approx \boxed{-81 \text{ см}}$

Задача 5.02. Найти графически амплитуду A колебаний, которые возникают при сложении следующих колебаний: а) $x_1 = 3.0\cos(\omega t + \pi/3)$, $x_2 = 8.0\sin(\omega t + \pi/6)$; б) $x_1 = 3.0\cos\omega t$, $x_2 = 5.0\cos(\omega t + \pi/4)$, $x_3 = 6.0\sin\omega t$.

Решение:
а) $x_1 = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 3\cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\sin(\omega t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$x_2 = 8\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 8\cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 8\sin(\omega t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x_1 + x_2 = \dfrac{11}{2}\cos(\omega t) + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\sin(\omega t)$, то есть $\boxed{A = \sqrt{\left(\dfrac{11}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 7}$

б) $x_1 = 3\cos(\omega t)$, $x_2 = 5\cos(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 5\sin(\omega t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $x_3 = 6\sin(\omega t)$

Тогда сложим, получим $\boxed{A = \sqrt{\left(3 + \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(6 - \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 7}$

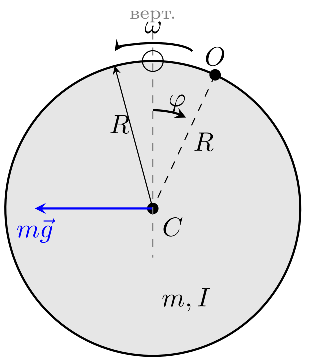
Задача 5.03. Найти период малых поперечных колебаний шарика массы $m = 40$ г, укрепленного на середине натянутой струны длины $l = 1,0$ м. Силу натяжения струны считать постоянной и равной $F = 10$ Н. Массой струны и силами тяжести пренебречь.

Решение (задача 5.03):
$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{2x}{l}$ для малых колебаний от середины l, так как $F_{\text{вост}} = 2F\sin(\theta) = \frac{4F}{l}x$, $kx = \frac{4F}{l}x$, то есть $k = \frac{4F}{l}$, отсюда $\omega^2 = \frac{k}{m}$, тогда $\omega = \sqrt{\frac{4F}{ml}}$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{4F}} = \pi\sqrt{\frac{ml}{F}}}$$

Задача 5.04. Однородный диск радиуса $R = 13$ см может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через край диска. Найти период малых колебаний этого диска, если логарифмический декремент затухания $\lambda = 1.00$.

Решение:



Момент инерции диска относительно оси O:

$$I = I_C + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Собственная частота: $\omega_0^2 = \frac{mgR}{I} = \frac{mgR}{\frac{3}{2}mR^2} = \frac{2g}{3R}$. Условная частота затухающих колебаний: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.
$\lambda = \beta T = \beta\frac{2\pi}{\omega} \implies \beta = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\lambda\omega}{2\pi}\right)^2 \implies \omega^2\left(1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\right) = \omega_0^2$$

$$\omega^2\left(\frac{4\pi^2 + \lambda^2}{4\pi^2}\right) = \frac{2g}{3R}$$

Искомый период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi^2 + \lambda^2}{4\pi^2 \cdot \frac{2g}{3R}}} = \boxed{\sqrt{\frac{3R(4\pi^2 + \lambda^2)}{2g}}} \approx 0.9 \text{ с}$$

Задача 5.05. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах $\omega_1 = 400$ с$^{-1}$ и $\omega_2 = 600$ с$^{-1}$ равны между собой. Найти частоту ω, при которой амплитуда смещения максимальна.

Решение:
$A(\omega) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$, так как $A(\omega_1) = A(\omega_2)$:

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2 = (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\beta^2\omega_2^2$$

$$\omega_1^4 - 2\omega_0^2\omega_1^2 + 4\beta^2\omega_1^2 = \omega_2^4 - 2\omega_0^2\omega_2^2 + 4\beta^2\omega_2^2$$

$$\omega_0^2 - 2\beta^2 = \frac{\omega_2^2 + \omega_1^2}{2} \implies \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{\omega_2^2 + \omega_1^2}{2}} \approx 509.9 \text{ Гц}$$

Задача 5.06. Шарик массы $m = 50$ г подвешен на пружинке жесткости $\varkappa = 20.0$ Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с частотой $\omega = 25.0$ с$^{-1}$ шарик совершает установившиеся колебания. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = 3\pi/4$. Найти добротность осциллятора.

Решение:
$\omega_0 = \sqrt{\frac{\varkappa}{m}} = 20$ Гц, $\tan(\varphi) = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$, тогда $-1 = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega}$, при $\omega = 25$ получаем $\beta = 4.5$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \boxed{\frac{20}{9} = \frac{\omega\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)\tan(\varphi)}}$$

Домашнее задание 05

Задача 5.11. Найти круговую частоту и амплитуду гармонических колебаний частицы, если на расстояниях x_1 и x_2 от положения равновесия ее скорость v_1 и v_2.

Решение:

$$\begin{matrix} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{matrix} \implies \begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi) \\ x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi) \\ v_1 = -A\omega\sin(\omega t_1 + \varphi) \\ v_2 = -A\omega\sin(\omega t_2 + \varphi) \end{cases}, \text{ то есть } \begin{matrix} \dfrac{x_1^2}{A^2} = \cos^2(\omega t_1 + \varphi) \\ \left(\dfrac{-v_1}{A\omega}\right)^2 = \sin^2(\omega t_1 + \varphi) \end{matrix}$$

А это значит, что $\begin{matrix} v_1^2 = \omega^2(A^2 - x_1^2) \\ v_2^2 = \omega^2(A^2 - x_2^2) \end{matrix}$ или $v_1^2 - v_2^2 = \omega^2(x_2^2 - x_1^2)$, отсюда $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}}$

Амплитуда выражается аналогично $\boxed{A = \sqrt{\frac{v_1^2x_2^2 - v_2^2x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}}$

Задача 5.12. Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом $T = 0.60$ с и амплитудой $a = 10.0$ см. Найти среднюю скорость точки за время, в течение которого она проходит путь $a/2$: а) из крайнего положения; б) из положения равновесия.

Решение:

$$\Delta t = \int_{A/2}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{v(x)} = \int_{A/2}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{x}{A}\right)\Bigg|_{A/2}^{A} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\omega}$$

$$v = \boxed{\frac{A/2}{\pi/3\omega} = \frac{3A\omega}{2\pi} = \frac{3A}{T} = 0.5 \text{ м/с}}$$

$$\Delta t = \int_{0}^{A/2}\frac{\mathrm{d}x}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{\pi}{6\omega} \implies v = \boxed{\frac{A/2}{\pi/6\omega} = \frac{3A\omega}{\pi} = \frac{6A}{T} = 1 \text{ м/с}}$$

Задача 5.13. Определить период малых колебаний шарика, подвешенного на нерастяжимой нити длины $l = 20$ см, если он находится в идеальной жидкости, плотность которой в $\eta = 3.0$ раза меньше плотности шарика.

Решение:
$\rho_{\text{ж}} = \frac{\rho}{\eta}$, $mg = \rho Vg$, $F_A = \frac{\rho}{\eta}Vg$. Тогда $mg - F_A = \rho Vg\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$. $\cancel{m}g_{\text{эфф}} = \cancel{m}g\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$.

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{\text{эфф}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\eta l}{(\eta - 1)g}} \approx 1.1 \text{ с}}$$

Задача 5.14. Точка совершает колебания с частотой ω и коэффициентом затухания β. Найти амплитуду скорости точки как функцию времени, если в момент $t = 0$: а) амплитуда ее смещения равна a_0; б) смещение $x(0) = 0$ и проекция скорости $v_x(0) = \dot{x}_0$.

Решение:

Закон затухающих колебаний: $x(t) = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$. Скорость $v_x = \dot{x} = -a_0 e^{-\beta t}(\beta\cos\varphi + \omega\sin\varphi)$, где $\varphi = \omega t + \alpha$. Амплитуда скорости:

$$v(t) = ae^{-\beta t}\sqrt{\omega^2 + \beta^2}$$

а) При начальной амплитуде a_0:

$$v(t) = a_0\sqrt{\omega^2 + \beta^2}e^{-\beta t}$$

б) Если $x(0) = 0$, то $x(t) = ae^{-\beta t}\sin\omega t$. Тогда $v_x(0) = \dot{x}_0 = a\omega \implies a = |\dot{x}_0|/\omega$. Подставляя в общую формулу:

$$v(t) = |\dot{x}_0|\sqrt{1 + (\beta/\omega)^2}e^{-\beta t}$$

Семинар 06. Колебания (продолжение)

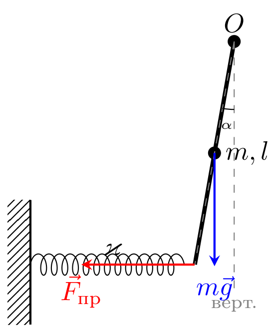
Задача 6.01. Частица массы m находится в одномерном силовом поле, где ее потенциальная энергия зависит от координаты x как $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$, U_0 и a — постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Решение:

$U(x) = v_0(1 - \cos(ax))$, $\dot{p} = \frac{\partial U}{\partial x} = U_0 a\sin(ax)$; $\dot{x} = \frac{p}{m} \implies \ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m}$, тогда $m\ddot{x} = -\varkappa x$ или $\ddot{x} = \frac{-\varkappa}{m}x$, выразим $\varkappa$: $\varkappa = \frac{\dot{p}}{x} = \frac{U_0 a\sin(ax)}{x} \approx U_0 a^2$. Тогда $\omega^2 = \frac{U_0 a^2}{m}$ и $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U_0 a^2}}}$

Задача 6.02. Найти круговую частоту малых колебаний тонкого однородного стержня массы m и длины l вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. Жесткость пружины $\varkappa$. В положении равновесия стержень вертикален.

Решение:



Перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с вращающимся стержнем. Для малых отклонений деформация пружины $x \approx l\alpha$, а сила $F_{\text{пр}} = \varkappa x \approx \varkappa l\alpha$ направлена горизонтально.

$$M_{\text{возвр}} = -\frac{mgl}{2}\alpha - F_{\text{пр}}l\cos\alpha \approx -\left(\frac{mgl}{2} + \varkappa l^2\right)\alpha$$

Момент инерции стержня: $I = \frac{1}{3}ml^2$.

$$I\ddot{\alpha} = M_{\text{возвр}} \implies \frac{1}{3}ml^2\ddot{\alpha} + \left(\frac{mgl}{2} + \varkappa l^2\right)\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{3\left(\frac{mgl}{2} + \varkappa l^2\right)}{ml^2}\alpha = \ddot{\alpha} + \left(\frac{3g}{2l} + \frac{3\varkappa}{m}\right)\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0, \quad \text{где } \omega^2 = \frac{3g}{2l} + \frac{3\varkappa}{m}; \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3\varkappa}{m}}}$$

Задача 6.03. При сложении двух гармонических колебаний одного направления результирующее колебание точки имеет вид $x = a\cos(2.1t)\cdot\cos(50.0t)$, где t — в секундах. Найти круговые частоты складываемых колебаний и период биений.

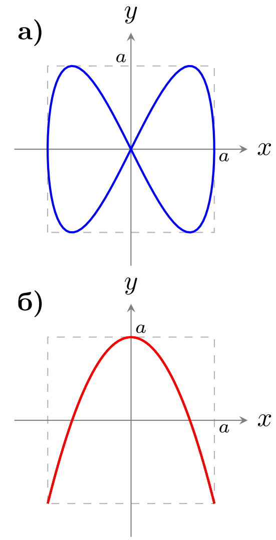
Решение:

$x = a\cos(2.1t)\cos(50t)$, по формуле $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.

Получаем $x = \frac{a}{2}\cos\left(\boxed{52.1}t\right) + \frac{a}{2}\cos\left(\boxed{47.9}t\right)$. $\boxed{A = \frac{2\pi}{52.1 - 47.9} = \frac{\pi}{2.1} \approx 1.5 \text{ с}}$.

Задача 6.04. Найти уравнение траектории $y(x)$ точки, если она движется по закону: а) $x = a\sin\omega t$, $y = a\sin 2\omega t$; б) $x = a\sin\omega t$, $y = a\cos 2\omega t$. Изобразить примерные графики этих траекторий.

Решение:



а) Из первого уравнения выразим синус: $\sin\omega t = \frac{x}{a}$. Второе уравнение запишем через синус двойного угла: $y = a\sin 2\omega t = 2a\sin\omega t\cos\omega t$.

$$y^2 = 4a^2\left(\frac{x}{a}\right)^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = 4x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

б) Аналогично, из первого уравнения $\sin\omega t = \frac{x}{a}$.

Для второго используем формулу косинуса двойного угла: $y = a\cos 2\omega t = a(1 - 2\sin^2\omega t)$.
Подставляем выраженный ранее синус:

$$y = a\left(1 - 2\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Домашнее задание 06

Задача 6.11. Точка движется в плоскости xy по закону $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$, где A, B, ω — постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки $y(x)$ и направление ее движения по этой траектории; б) ускорение $\vec{a}$ точки в зависимости от ее радиуса-вектора $\vec{r}$ относительно начала координат.

Решение:

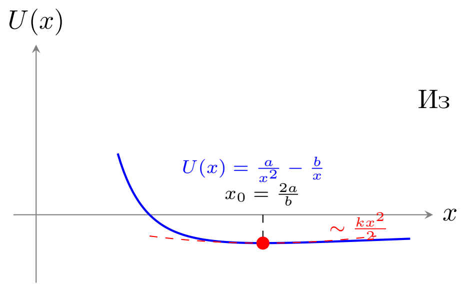
$$\begin{matrix} x = A\sin(\omega t) \\ y = B\cos(\omega t) \end{matrix} \implies \begin{matrix} \frac{x}{A} = \sin(\omega t) \\ \frac{y}{A} = \cos(\omega t) \end{matrix}, \text{ тогда } \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = \boxed{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1}.$$

Направление движения - по часовой.

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = \omega^2(x\vec{i} + y\vec{j}) = \omega^2\vec{r}^2$. Таким образом $\boxed{\vec{a}(t) = -\omega^2\vec{r}(t)}$

Задача 6.12. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U(x) = a/x^2 - b/x$, где a и b — положительные постоянные. Найти период малых колебаний около положения равновесия.

Решение (задача 6.12):



Для малых колебаний эффективная жесткость k определяется второй производной потенциальной энергии в точке равновесия:

$$k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

Из 1.03 знаем положение равновесия: $x_0 = \frac{2a}{b}$:

$$k = U''\left(\frac{2a}{b}\right) = 6a\left(\frac{b}{2a}\right)^4 - 2b\left(\frac{b}{2a}\right)^3 = \frac{b^4}{8a^3}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{b^4/8a^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{8ma^3}{b^4}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{b^2}\sqrt{4a^2 \cdot 2ma} = \frac{4\pi a\sqrt{2ma}}{b^2}}$$

Задача 6.13. Определить период малых колебаний шарика, подвешенного на нерастяжимой нити длины $l = 20$ см, если он находится в идеальной жидкости, плотность которой в $\eta = 3.0$ раза меньше плотности шарика.

Решение:

$F_A = mg/\eta$. «Эффективный вес» шарика в жидкости:

$$P_{\text{эфф}} = mg - F_A = mg\frac{\eta - 1}{\eta}$$

При малом отклонении на угол α ($\sin\alpha \approx \alpha = x/l$) возвращающая сила F_x равна проекции $P_{\text{эфф}}$ на касательную к траектории:

$$F_x = -P_{\text{эфф}}\sin\alpha \approx -mg\frac{\eta - 1}{\eta l}x$$

$$m\ddot{x} + mg\frac{\eta - 1}{\eta l}x = 0 \implies \ddot{x} + \underbrace{\frac{g(\eta - 1)}{\eta l}}_{\omega^2}x = 0$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\eta l}{g(\eta - 1)}}} \approx 1,1 \text{ с}$$

Задача 6.14. На гладкий горизонтальный стержень AB надета небольшая муфточка массы $m = 50$ г, которая соединена с концом A стержня пружинкой жесткости $\varkappa = 50$ Н/м. Стержень вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 10,0$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. Найти частоту ω_0 малых колебаний муфточки.

Решение:

Запишем функцию Лагранжа муфты (l_0 — недеформированная длина):

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\omega^2}{2} - \frac{\varkappa(r - l_0)^2}{2}$$

Обобщенный импульс: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$.

Функция Гамильтона $H = p\dot{r} - L$:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{\frac{\varkappa(r - l_0)^2}{2} - \frac{mr^2\omega^2}{2}}_{U_{\text{эфф}}(r)}$$

$$k_{\text{эфф}} = \frac{d^2U_{\text{эфф}}}{dr^2} = \varkappa - m\omega^2$$

Частота колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\text{эфф}}}{m}} = \boxed{\sqrt{\frac{\varkappa}{m} - \omega^2}} = 30 \text{ с}^{-1}$$

Задача 6.15. Найти добротность математического маятника длины $l = 50$ см, если за $\tau = 5.2$ мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4.0 \cdot 10^4$ раз.

Решение:

$$a(t) = a_0e^{-\beta t} \implies E(t) = E_0e^{-2\beta t}$$

По условию за время τ энергия уменьшилась в η раз:

$$\frac{E_0}{E(\tau)} = \eta \implies e^{2\beta\tau} = \eta \implies 2\beta\tau = \ln\eta \implies \beta = \frac{\ln\eta}{2\tau}$$

Добротность при слабом затухании определяется как $Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$. Собственная частота математического маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Подставляем ω_0 и β в формулу добротности:

$$Q = \frac{\sqrt{g/l}}{2\left(\frac{\ln\eta}{2\tau}\right)} = \frac{\tau\sqrt{g/l}}{\ln\eta} \approx \frac{1381}{10.6} \approx 130$$

Задача 6.16. Найти разность фаз φ между смещением и вынуждающей силой при резонансе смещения, если собственная частота $\omega_0 = 50$ с$^{-1}$ и коэффициент затухания $\beta = 5,2$ с$^{-1}$.

Решение:

Тангенс разности фаз φ между смещением и вынуждающей силой задается формулой:

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Резонанс амплитуды смещения наступает при частоте вынуждающей силы $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Подставим эту резонансную частоту в формулу для $\tan\varphi$:

$$\tan\varphi = \frac{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2)} = \frac{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{2\beta^2} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}$$

Внесем β под корень для получения итогового выражения:

$$\tan\varphi = \boxed{\sqrt{\frac{\omega_0^2 - 2\beta^2}{\beta^2}} = \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 2}} \approx 9.51$$

Берем арктангенс для нахождения угла:

$$\varphi = \arctan(9.51) \approx 84^\circ$$

Семинар 07. Термодинамика

Задача 7.01. Один моль некоторого идеального газа изобарически нагрели на $\Delta T =$ 72 К, сообщив ему количество тепла $Q = 1.60$ кДж. Найти приращение его внутренней энергии и величину $\gamma = C_p/C_V$.

Решение:
Согласно первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A$$

Для изобарического процесса ($p = \text{const}$) работа газа $A = p\Delta V$ Из уравнения состояния идеального газа $pV = RT$ следует, что при постоянном давлении $p\Delta V = R\Delta T$. Следовательно, работа газа равна $A = R\Delta T$.

$$\Delta U = Q - A = Q - R\Delta T \approx 1001.4 \text{ Дж}$$

$\gamma = C_p/C_V$ Выразим теплоемкости через известные нам величины: $Q = C_p\Delta T \implies C_p = \frac{Q}{\Delta T}$. Изменение внутренней энергии всегда равно $\Delta U = C_V\Delta T \implies C_V = \frac{\Delta U}{\Delta T}$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \boxed{\frac{Q/(\Delta T)}{\Delta U/(\Delta T)} = \frac{Q}{\Delta U} \approx 1.6}$$

Задача 7.02. Найти молярную теплоемкость идеального газа при политропическом процессе $pV^n = \text{const}$, если показатель адиабаты газа равен γ. При каких значениях показателя политропы теплоемкость газа будет отрицательной?

Решение:
Запишем первое начало термодинамики в дифференциальной форме для одного моля газа:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A$$

Выразим каждое слагаемое через температуру T: $\mathrm{d}Q = C\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}U = C_V\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}A = p\mathrm{d}V$.

$$C\mathrm{d}T = C_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V \implies C = C_V + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$$

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = R\mathrm{d}T$$

Теперь продифференцируем уравнение политропы $pV^n = \text{const}$:

$$\mathrm{d}p \cdot V^n + p \cdot nV^{n-1}\mathrm{d}V = 0 \implies V\mathrm{d}p = -np\mathrm{d}V$$

Подставим $V\mathrm{d}p$ в дифференциал уравнения состояния:

$$p\mathrm{d}V - np\mathrm{d}V = R\mathrm{d}T \implies p\mathrm{d}V(1-n) = R\mathrm{d}T \implies p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{R}{1-n}$$

$$C = C_V + \frac{R}{1-n}$$

$C_p = C_V + R$ и $\gamma = C_p/C_V$. Отсюда $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$.

$$C = \frac{R}{\gamma-1} + \frac{R}{1-n} = R\frac{1-n+\gamma-1}{(\gamma-1)(1-n)} = \boxed{R\frac{\gamma-n}{(\gamma-1)(1-n)}}$$

Теплоемкость будет отрицательной ($C < 0$), когда дробь $\frac{\gamma-n}{1-n} < 0$. Поскольку для всех реальных газов $\gamma > 1$:

$$1 < n < \gamma$$

@K1o0n

Задача 7.03. Найти (в расчете на моль) приращение энтропии углекислого газа при увеличении его температуры T в $m = 2,0$ раза, если процесс нагревания: а) изохорический; б) изобарический. Газ считать идеальным.

Решение:
Изменение энтропии для одного моля ($\nu = 1$) определяется интегралом $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$. Для углекислого газа ($CO_2$) табличное значение показателя адиабаты $\gamma = 1.30$.

а) Изохорический процесс ($V = \text{const}$):
Теплота $dQ = C_V dT$, где $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$.

$$\Delta S_V = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V dT}{T} = \boxed{\frac{R}{\gamma-1}\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{R}{\gamma-1}\ln m} \approx 19.2 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$$

б) Изобарический процесс ($p = \text{const}$):
Теплота $dQ = C_p dT$, где $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$.

$$\Delta S_p = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = \boxed{\frac{\gamma R}{\gamma-1}\ln m = \gamma\Delta S_V} \approx 25.0 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$$

Задача 7.04. При очень низких температурах теплоемкость кристаллов $C = aT^3$, где a — постоянная. Найти энтропию кристалла как функцию температуры в этой области.

Решение:

$C = aT^3$, $\mathrm{d}Q = \nu C\mathrm{d}T$, формула энтропии: $\mathrm{d}S = \frac{\nu C\mathrm{d}T}{T}$, тогда: $S = \nu\displaystyle\int T^2\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\nu aT^3}{3}}$

Задача 7.05. Вычислить γ для газовой смеси, состоящей из $\nu_1 = 2.0$ моль кислорода и $\nu_2 = 3.0$ моль углекислого газа. Газы считать идеальными.

Решение:
Показатель адиабаты смеси определяется как отношение теплоемкостей: $\gamma = \frac{C_{p,\text{см}}}{C_{V,\text{см}}}$.

$$C_{V,\text{см}} = \frac{\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2}}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\nu_1\frac{R}{\gamma_1-1} + \nu_2\frac{R}{\gamma_2-1}}{\nu_1+\nu_2}$$

$$C_{p,\text{см}} = \frac{\nu_1 C_{p1} + \nu_2 C_{p2}}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\nu_1\frac{R\gamma_1}{\gamma_1-1} + \nu_2\frac{R\gamma_2}{\gamma_2-1}}{\nu_1+\nu_2}$$

$$\gamma = \boxed{\frac{\nu_1\gamma_1(\gamma_2-1) + \nu_2\gamma_2(\gamma_1-1)}{\nu_1(\gamma_2-1) + \nu_2(\gamma_1-1)}} \approx 1.33$$

Домашнее задание 07

Задача 7.11. При некотором политропическом процессе объем аргона был увеличен в $\alpha = 4.0$ раза. Давление при этом уменьшилось в $\beta = 8.0$ раз. Найти молярную теплоемкость аргона в этом процессе, считая газ идеальным.

Решение (задача 7.11):
Уравнение политропического процесса имеет вид $pV^n = \mathrm{const}$. Запишем его для начального и конечного состояний:

$$p_1V_1^n = p_2V_2^n \implies \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$$

По условию объем увеличился в $\alpha = 4.0$ раза ($V_2/V_1 = \alpha$), а давление уменьшилось в $\beta = 8.0$ раз ($p_1/p_2 = \beta$). Найдем показатель политропы n:

$$\beta = \alpha^n \implies 8.0 = 4.0^n \implies 2^3 = 2^{2n} \implies n = 1.5$$

Теплоемкость газа в политропическом процессе выражается формулой:

$$C = C_V + \frac{R}{1-n} = C_V + \frac{C_p - C_V}{1-n} = C_v + \frac{C_V\left(\frac{C_p}{C_v} - 1\right)}{1-n} = C_V + \frac{C_V(\gamma-1)}{1-n} = \boxed{C_V\frac{n-\gamma}{n-1}}$$

$C \approx -4.2$ Дж/(моль $\cdot$ К)

Задача 7.12. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширили по закону $p = \alpha V$, где α — постоянная. Первоначальный объем газа V_0. В результате расширения объем увеличился в η раз. Найти: а) приращение внутренней энергии газа; б) работу, совершенную газом; в) молярную теплоемкость газа в этом процессе.

Решение:

а) Приращение внутренней энергии:

Изменение внутренней энергии ΔU идеального газа можно выразить через изменение произведения давления на объем:

$$\Delta U = \frac{\nu R\Delta T}{\gamma - 1} = \frac{\Delta(pV)}{\gamma-1}$$

По условию процесс описывается уравнением $p = \alpha V$, следовательно $pV = \alpha V^2$. Начальный объем равен V_0, конечный $V_1 = \eta V_0$.

$$\Delta U = \frac{\alpha V_1^2 - \alpha V_0^2}{\gamma-1} = \frac{\alpha(\eta V_0)^2 - \alpha V_0^2}{\gamma - 1} = \boxed{\frac{\alpha V_0^2(\eta^2-1)}{\gamma-1}}$$

б) Работа газа:

Работа определяется интегралом от давления по объему: $A = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV$.

$$A = \int_{V_0}^{\eta V_0} \alpha V\,dV = \frac{\alpha V^2}{2}\Big|_{V_0}^{\eta V_0} = \frac{\alpha}{2}(\eta^2V_0^2 - V_0^2) = \boxed{\frac{\alpha V_0^2(\eta^2-1)}{2}}$$

в) Молярная теплоемкость:

Уравнение процесса $p = \alpha V$ запишем в виде $pV^{-1} = \mathrm{const}$. Это политропический процесс с показателем $n = -1$. Воспользуемся формулой теплоемкости из 7.11:

$$C = C_V\frac{n-\gamma}{n-1}$$

Подставляем $n = -1$ и молярную теплоемкость при постоянном объеме $C_V = \frac{R}{\gamma-1}$:

$$C = \frac{R}{\gamma-1}\cdot\frac{-1-\gamma}{-1-1} = \frac{R}{\gamma-1}\cdot\frac{-(\gamma+1)}{-2} = \boxed{\frac{R(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} = C_V + \frac{R}{2}}$$

Задача 7.13. Во сколько раз нужно увеличить изотермически объем идеального газа в количестве $\nu = 4$ моля, чтобы его энтропия выросла на $\Delta S = 23$ Дж/К?

Решение:

Из первого начала термодинамики $dQ = dU + dA$. $T = \mathrm{const} \implies dU = 0$. Следовательно, подведенная теплота равна совершенной работе: $dQ = dA = pdV$.

Запишем элементарное приращение энтропии с $p = \frac{\nu RT}{V}$:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{pdV}{T} = \frac{\nu RTdV}{TV} = \nu R\frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2}\nu R\frac{dV}{V} = \nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Обозначим искомое отношение объемов как $n = V_2/V_1$. Выразим его из полученной формулы:

$$\ln n = \frac{\Delta S}{\nu R} \implies \boxed{n = \exp\left(\frac{\Delta S}{\nu R}\right) = e^{0.6916} \approx 2.0}$$

Задача 7.14. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором энтропия газа изменяется с температурой T по закону $S = aT + C_V\ln T$, где $a > 0 = \mathrm{const}$, C_V — молярная теплоемкость данного газа при постоянном объеме. Найти, как зависит температура газа от его объема в этом процессе, если $T = T_0$ при $V = V_0$.

Решение:

Из определения энтропии $dS = \frac{dU+dA}{T}$. Знаем: $dA = pdV, dU = C_VT$.

$$dS = \frac{C_VdT + pdV}{T} = C_V\frac{dT}{T} + \frac{R}{V}dV$$

С другой стороны, по условию задачи функция энтропии имеет вид $S = aT + C_V\ln T$.

$$dS = adT + C_V\frac{dT}{T}$$

$$adT + \cancel{C_V\frac{dT}{T}} = \cancel{C_V\frac{dT}{T}} + \frac{R}{V}dV$$

Проинтегрируем полученное выражение от (T_0, V_0) до состояния (T, V):

$$\int_{T_0}^{T} adT = \int_{V_0}^{V}\frac{R}{V}dV$$

$$a(T - T_0) = R\ln\frac{V}{V_0} \implies \boxed{T = T_0 + \frac{R}{a}\ln\frac{V}{V_0}}$$

Задача 7.15. Найти приращение энтропии алюминиевого бруска $m = 3.0$ кг при нагревании его от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К, если в этом интервале температур удельная теплоемкость алюминия $c = a + bT$, где $a = 0.77$ Дж/(г·К), $b = 0.46$ мДж/(г·К^2).

Решение:

Запишем приращение энтропии через теплоемкость: $dS = \frac{dQ}{T} = m\left(\frac{a}{T} + b\right)dT$.

Интегрируем от T_1 до T_2: $\boxed{\Delta S = m\left(a\ln\frac{T_2}{T_1} + b(T_2 - T_1)\right)} \approx 2015$ Дж/К

Задача 7.16. В некотором процессе температура вещества зависит от его энтропии S по закону $T \sim S^n$, где $n = \text{const}$. Найти теплоемкость C вещества как функцию S.

Решение:

$$dQ = CdT$$
$$dS = \frac{dQ}{T} \implies dQ = TdS$$

Приравняем оба выражения для элементарной теплоты dQ:

$$CdT = TdS \implies C = T\frac{dS}{dT}$$

Полученная формула — это самое общее выражение для теплоемкости через энтропию.

Введем некоторый коэффициент пропорциональности α, чтобы перейти к строгому равенству:

$$T = \alpha S^n$$

Найдем производную температуры по энтропии:

$$\frac{dT}{dS} = \alpha n S^{n-1}$$

Подставим саму функцию T и обратную производную dS/dT в формулу теплоемкости:

$$C = T \cdot \frac{1}{\frac{dT}{dS}} = \boxed{(\alpha S^n) \cdot \frac{1}{\alpha n S^{n-1}} = \frac{S}{n}}$$

Семинар 08. Распределение Максвелла

Задача 8.01. Пользуясь формулой $\varphi(v_x) = (m/2\pi kT)^{0.5} exp(-mv_x^2/2kT)$, определить долю молекул, модули скорости которых попадают в интервал $[v, v + dv]$

Решение:

$$dP_{v_x} = \varphi(v_x)dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)dv_x$$

Так как движения молекул вдоль осей x, y и z абсолютно независимы, вероятность равна произведению трех независимых вероятностей:

$$dP_{\vec{v}} = dP_{v_x} \cdot dP_{v_y} \cdot dP_{v_z} = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_x dv_y dv_z$$

Подставим функции φ и перемножим их. При умножении экспонент их показатели складываются:

$$dP_{\vec{v}} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right)dv_x dv_y dv_z$$

$$dP_{\vec{v}} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \underbrace{dV_v}_{4\pi v^2 dv}$$

$$dP_v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot 4\pi v^2 dv$$

$F(v) = dP_v/dv$

$$\boxed{F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)}$$

Задача 8.02. Определить относительное число молекул, компоненты скорости которых вдоль оси x находятся в интервале $(v_x, v_x + \delta v_x)$, а модули перпендикулярной составляющей скорости — в интервале $(v_\perp, v_\perp + \delta v_\perp)$. Масса каждой молекулы m, температура газа T.

Решение:

Воспользуемся трехмерной функцией распределения Максвелла:

$$dP = f(v)dV_v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dV_v$$

Перейдем в пространстве скоростей к цилиндрическим координатам, где осью цилиндра служит ось x. Элемент объема dV_v в таких координатах равен $v_\perp d\varphi dv_\perp dv_x$.

Поскольку нас интересуют молекулы с заданным $v_\perp$ независимо от их угла поворота φ в перпендикулярной плоскости, проинтегрируем элемент объема по $d\varphi$ от 0 до 2π:

$$dV_v = \int_0^{2\pi} v_\perp dv_\perp dv_x d\varphi = 2\pi v_\perp dv_\perp dv_x$$

Заменяя дифференциалы на малые интервалы δ получаем формулу:

$$\boxed{\frac{\delta N}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)2\pi v_\perp \delta v_\perp \delta v_x}$$

Задача 8.03. Рассчитать средний модуль скорости молекул идеального газа при температуре T, если масса молекулы газа равна m.

Решение:

По определению среднего значения:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty vF(v)dv$$

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \cdot 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

Воспользуемся табличным интегралом $\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha^2}$ для $\alpha = \frac{m}{2kT}$:

$$\langle v \rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^2} = 4\pi\frac{m\sqrt{m}}{2\pi kT\sqrt{2\pi kT}} \cdot \frac{4k^2T^2}{2m^2}$$

Сгруппируем множители и внесем всё под один корень:

$$\boxed{\langle v \rangle = \frac{4kT}{m}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = \sqrt{\frac{16k^2T^2m}{m^2 2\pi kT}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}$$

Задача 8.04. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более чем на $\delta\eta = 1.00\%$ от: а) наиболее вероятной скорости; б) средней квадратичной скорости.

Решение:

Относительное число молекул в интервале скоростей Δv вблизи значения v_0 равно:

$$\frac{\delta N}{N} = F(v_0)\Delta v$$

По условию скорости отличаются от заданного значения v_0 не более чем на $\delta\eta =$

$\frac{\delta v}{v_0}$. Следовательно, ширина интервала $\Delta v = 2\delta v = 2v_0\delta\eta$. Функция распределения Максвелла по модулю скорости:

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

а) Вблизи наиболее вероятной скорости $v_\text{в} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$:

Подставим $v_0 = v_\text{в}$ в функцию $F(v)$:

$$F(v_\text{в}) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{2kT}{m}\right)\exp(-1) = \frac{4}{e\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{2kT}} = \frac{4}{e\sqrt{\pi}}\frac{1}{v_\text{в}}$$

Умножим на ширину интервала $\Delta v = 2v_\text{в}\delta\eta$:

$$\frac{\delta N}{N} = \frac{4}{e\sqrt{\pi}}\frac{1}{v_\text{в}}\cdot 2v_\text{в}\delta\eta = \boxed{\frac{8\delta\eta}{e\sqrt{\pi}}} \approx 0.0166 = 1.66\%$$

.

б) Вблизи средней квадратичной скорости $v_\text{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$:

Подставим $v_0 = v_\text{кв}$ в функцию $F(v)$:

$$F(v_\text{кв}) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{3kT}{m}\right)\exp\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{\frac{2}{\pi e^3}}\sqrt{\frac{m}{kT}}$$

Так как $\sqrt{\frac{m}{kT}} = \frac{\sqrt{3}}{v_\text{кв}}$, перепишем:

$$F(v_\text{кв}) = 3\sqrt{\frac{2}{\pi e^3}}\frac{\sqrt{3}}{v_\text{кв}} = \sqrt{\frac{54}{\pi e^3}}\frac{1}{v_\text{кв}}$$

Умножим на ширину интервала $\Delta v = 2v_\text{кв}\delta\eta$:

$$\frac{\delta N}{N} = \sqrt{\frac{54}{\pi e^3}}\frac{1}{v_\text{кв}}\cdot 2v_\text{кв}\delta\eta = 2\sqrt{\frac{54}{\pi e^3}}\delta\eta = \boxed{12\sqrt{\frac{3}{2\pi e^3}}\delta\eta} \approx 0.0185 = 1.85\%$$

.

Задача 8.05. Определить $\langle v_x^2\rangle$ — среднее значение квадрата проекции v_x скорости молекул газа при температуре T. Масса каждой молекулы равна m.

Решение:

$$\langle v_x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2\varphi(v_x)dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)dv_x$$

Так как подынтегральная функция является четной (v_x^2 и экспонента симметричны), мы можем свести интеграл к промежутку от 0 до $+\infty$, просто удвоив его:

$$\langle v_x^2\rangle = 2\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^{+\infty} v_x^2\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)dv_x = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Где $\alpha = \frac{m}{2kT}$.

$$\boxed{\langle v_x^2\rangle = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)} = \frac{kT}{m}}$$

Домашнее задание 08

Задача 8.11. Найти для газообразного азота при $T = 300$ К отношение числа молекул с компонентами скорости вдоль оси x в интервале 300 ± 0.31 м/с к числу молекул с компонентами скорости вдоль той же оси в интервале 500 ± 0.51 м/с.

Решение:

$$dN = N\varphi(v_x)dv_x = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)dv_x$$

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{\exp\left(-\frac{mv_{x1}^2}{2kT}\right)dv_{x1}}{\exp\left(-\frac{mv_{x2}^2}{2kT}\right)dv_{x2}} = \exp\left(\frac{m(v_{x2}^2 - v_{x1}^2)}{2kT}\right)\frac{dv_{x1}}{dv_{x2}}$$

Умножим числитель и знаменатель показателя экспоненты на число Авогадро N_A. Тогда масса одной молекулы m превратится в молярную массу M, а постоянная Больцмана k — в универсальную газовую постоянную R:

$$\boxed{\frac{dN_1}{dN_2} = \exp\left(\frac{M(v_{x2}^2 - v_{x1}^2)}{2RT}\right)\frac{dv_{x1}}{dv_{x2}}} = \exp\left(\frac{0.028\cdot(500^2 - 300^2)}{2\cdot 8.314\cdot 300}\right)\cdot\frac{31}{51} \approx 1.49$$

Задача 8.12. Газ, состоящий из молекул массы m, находится при температуре T. Найти относительное число молекул, у которых модули составляющих скорости, перпендикулярных некоторому направлению, лежат в интервале $(v_\perp, v_\perp + \delta v_\perp)$.

Решение:

Выберем «некоторое направление» из условия за ось z. $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Запишем вероятность, что вектор скорости имеет проекции в интервалах dv_x, dv_y, dv_z:

$$dP = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right)dv_x dv_y dv_z$$

Проинтегрируем это выражение по dv_z от $-\infty$ до $+\infty$. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha z^2}dz = \sqrt{\pi/\alpha}$:

$$dP_{v_x,v_y} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2kT}\right)dv_x dv_y\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)dv_z$$

$$dP_{v_x,v_y} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right)dv_x dv_y\cdot\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} = \frac{m}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right)dv_x dv_y$$

$dv_x dv_y = v_\perp d\varphi dv_\perp$. Интегрируем по φ от 0 до 2π:

$$dP_{v_\perp} = \int_0^{2\pi}\frac{m}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right)v_\perp dv_\perp d\varphi = 2\pi\frac{m}{2\pi kT}\exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right)v_\perp dv_\perp$$

$$\boxed{\frac{\delta N}{N} = \frac{m}{kT}v_\perp\exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2kT}\right)\delta v_\perp}$$

Задача 8.13. При изменении температуры идеального газа максимум функции распределения $F(v)$ уменьшился в n раз. Как и во сколько раз изменилась температура T газа?

Решение (задача 8.13):
Максимум функции $F(v)$ достигается при $v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

$$F_{max} = F(v_в) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\sqrt{\frac{2kT}{m}}\right)^2 \exp\left(-\frac{m}{2kT}\cdot\frac{2kT}{m}\right)$$

$$F_{max} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{2kT}{m}e^{-1} = \frac{8\pi}{e}\frac{m\sqrt{m}}{2\pi kT\sqrt{2\pi kT}}\frac{kT}{m} = \frac{4}{e\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

Максимальное значение функции обратно пропорционально корню из температуры:

$$F_{max} = \frac{\text{const}}{\sqrt{T}}$$

Тогда, если максимум уменьшился в n раз, то температура увеличилась в $\boxed{n^2}$ раз.

Задача 8.14. Смесь водорода и гелия находится при $T = 300$ K. При какой скорости v молекул значения функции $F(v)$ будут одинаковыми для обоих газов?

Решение:
Пусть водород — индекс 1, а гелий — индекс 2, тогда: $F_1(v) = F_2(v)$.

$$4\pi\left(\frac{m_1}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{m_1v^2}{2kT}\right) = 4\pi\left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{m_2v^2}{2kT}\right)$$

$$m_1^{3/2}\exp\left(-\frac{m_1v^2}{2kT}\right) = m_2^{3/2}\exp\left(-\frac{m_2v^2}{2kT}\right)$$

Перенесем экспоненты в одну сторону, а массы в другую:

$$\frac{\exp\left(-\frac{m_1v^2}{2kT}\right)}{\exp\left(-\frac{m_2v^2}{2kT}\right)} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{3/2} \implies \exp\left(\frac{(m_2-m_1)v^2}{2kT}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{3/2}$$

Прологарифмируем обе части уравнения:

$$\frac{(m_2-m_1)v^2}{2kT} = \frac{3}{2}\ln\frac{m_2}{m_1} \implies v^2 = \frac{3kT}{m_2-m_1}\ln\frac{m_2}{m_1}$$

Умножим числитель и знаменатель на число Авогадро N_A, чтобы перейти к молярным массам ($M = mN_A$) и универсальной газовой постоянной ($R = kN_A$):

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{3RT}{M_2-M_1}\ln\frac{M_2}{M_1}}} \approx 1610 \text{ м/с}$$

Задача 8.15. Определить с помощью функции $\varphi(v_x)$ давление газа на стенку, если температура газа T и концентрация молекул n.

Решение:
Молекулы со скоростью $v_x > 0$ передают единице площади за единицу времени импульс $dp = 2mv_x\cdot v_xn\varphi(v_x)dv_x$. (Где $v_xn\varphi(v_x)dv_x$ это $dN = dn\cdot dV = n\varphi(v_x)dv_xSv_xdt$)
Интегрируя по всем $v_x > 0$ и учитывая четность функции, получаем: $p = 2mn\int_0^\infty v_x^2\varphi(v_x)dv_x = mn\langle v_x^2\rangle$.
Подставляя известное значение $\langle v_x^2\rangle = kT/m$ (из задачи 8.05), находим итоговое давление: $\boxed{p = mn(kT/m) = nkT}$.

Задача 8.16. Найти $\langle 1/v\rangle$ — среднее значение обратной скорости молекул идеального газа при температуре T, если масса каждой молекулы равна m. Сравнить полученную величину с обратной величиной средней скорости.

Решение:

$$\langle 1/v\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{v}F(v)dv$$

$$\langle 1/v\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{v}4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

Вычислим получившийся интеграл. Сделаем замену переменной $u = \frac{mv^2}{2kT}$, тогда дифференциал $du = \frac{m}{kT}vdv \implies vdv = \frac{kT}{m}du$:

$$\int_0^\infty v\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv = \frac{kT}{m}\int_0^\infty e^{-u}du = \frac{kT}{m}$$

$$\langle 1/v\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{kT}{m} = 4\pi\frac{m\sqrt{m}}{2\pi kT\sqrt{2\pi kT}}\frac{kT}{m} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{m}{kT}} = \boxed{\sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}}$$

Средняя скорость равна $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$. Ее обратная величина: $\frac{1}{\langle v\rangle} = \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}$.
Найдем отношение этих двух величин:

$$\frac{\langle 1/v\rangle}{1/\langle v\rangle} = \langle 1/v\rangle\cdot\langle v\rangle = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}\cdot\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{16}{\pi^2}} = \frac{4}{\pi} \approx 1.27$$

Семинар 09. Распределение Больцмана

Задача 9.01. Газ находится в однородном гравитационном поле. Найти концентрацию молекул n_0 на нулевой высоте, если полное количество молекул в цилиндрическом столбе газа с основанием площадью S равно N.

Решение:

$$N = \int_0^{+\infty} V\mathrm{d}n = \int_0^{+\infty} n(h)S\mathrm{d}h = \left|\begin{matrix} n(h) = n_0\exp(-U/kT) \\ n(h) = n_0\exp\left(\frac{-mgh}{kT}\right)\end{matrix}\right| = Sn_0\int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{-mgh}{kT}\right)\mathrm{d}h$$

Тогда $N = Sn_0\frac{kT}{mg}$, значит $\boxed{n_0 = \frac{mgN}{SkT}}$

Задача 9.02. Потенциальная энергия молекул газа зависит от расстояния r до центра поля как $U(r) = ar^2$, где a — положительная постоянная. Температура газа T, концентрация молекул в центре поля n_0. Найти: а) число молекул в слое $(r, r+dr)$; б) наиболее вероятное расстояние молекул $r_{вер}$; в) относительное число всех молекул в слое $(r, r+dr)$; г) во сколько раз изменится концентрация молекул в центре поля при уменьшении температуры в n раз.

Решение (задача 9.02):

а) Число молекул в слое $(r, r+dr)$**:**

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{U(r)}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right)$$

$$dN = n(r) \underbrace{dV}_{4\pi r^2 dr} = \boxed{4\pi n_0 r^2 \exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) dr}$$

б) Наиболее вероятное расстояние $r_{\text{вер}}$**:**

Чтобы найти максимум $f(r)$, приравняем к нулю производную по r :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right)\right) = 2r \exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) + r^2\left(-\frac{2ar}{kT}\right)\exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) = 0$$

$$1 - \frac{ar^2}{kT} = 0 \implies r_{\text{вер}} = \boxed{\sqrt{\frac{kT}{a}}}$$

в) Относительное число молекул dN/N**:**

Сначала найдем полное число молекул N, проинтегрировав dN от 0 до ∞. Сделаем замену $\alpha = a/kT$. Используем табличный интеграл $\int_0^\infty r^2 e^{-\alpha r^2} dr = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$:

$$N = \int_0^\infty 4\pi n_0 r^2 \exp\left(-\alpha r^2\right) dr = 4\pi n_0 \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = n_0 \left(\frac{\pi kT}{a}\right)^{3/2}$$

Тогда искомое относительное число молекул в слое:

$$\frac{dN}{N} = \frac{4\pi n_0 r^2 \exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) dr}{n_0\left(\frac{\pi kT}{a}\right)^{3/2}} = \boxed{4\pi\left(\frac{a}{\pi kT}\right)^{3/2} r^2 \exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) dr}$$

г) Изменение концентрации в центре:

Полное число молекул N в системе остается неизменным при изменении температуры. Из формулы для N (пункт «в») видно, что $N \sim n_0 T^{3/2} = \text{const}$. Следовательно:

$$n_{01} T_1^{3/2} = n_{02} T_2^{3/2} \implies \frac{n_{02}}{n_{01}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}$$

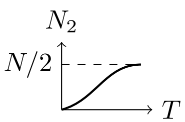
Если температуру уменьшили в n раз, то концентрация увеличится в $\boxed{n^{3/2}}$ раз.

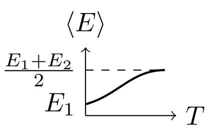
Задача 9.03. Система состоит из N частиц, которые могут находиться только в двух состояниях 1 и 2 с энергиями E_1 и E_2, причем $E_2 > E_1$. Найти зависимость от температуры T системы числа частиц в состоянии 2 и средней энергии частиц. Изобразить примерный вид графиков этих зависимостей.

Решение:

$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(\frac{-\Delta E}{kT}\right)$, $N_2 = N_1 \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right) = (N - N_2)\exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right) \implies \boxed{N_2 = \frac{N}{1 + \exp\left(\frac{-\Delta E}{kT}\right)}}$

$\langle E \rangle = \frac{E_1 N_1 + E_2 N_2}{N} = \boxed{\dfrac{E_1 + E_2 \exp\left(\frac{-\Delta E}{kT}\right)}{1 + \exp\left(\frac{-\Delta E}{kT}\right)}}$





Задача 9.04. Газ находится в очень высоком цилиндрическом сосуде при температуре T. Считая поле тяжести однородным, найти среднее значение потенциальной энергии молекул газа. Как зависит эта величина от того, состоит ли газ из одного сорта молекул или из нескольких сортов?

Решение:

$$\langle U \rangle = \frac{\text{Энергия в слое}}{\text{Число молекул в слое}} = \frac{\int_0^{+\infty} U(h)\exp\left(\frac{-mgh}{kT}\right) \mathrm{d}h}{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-mgh}{kT}\right) \mathrm{d}h} = \frac{\int_0^{+\infty} mgh \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) dh}{\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) dh}$$

Введем обозначение $\alpha = \frac{mg}{kT}$. Перепишем интегралы:

$$\langle U \rangle = mg \frac{\int_0^{+\infty} h e^{-\alpha h} dh}{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha h} dh}$$

Интеграл в знаменателе равен $\frac{1}{\alpha}$. Интеграл в числителе $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$, откуда при $n = 1$ получаем $\frac{1}{\alpha^2}$.

$$\langle U \rangle = mg \frac{1/\alpha^2}{1/\alpha} = \frac{mg}{\alpha} = \frac{mg}{\frac{mg}{kT}} = \boxed{kT}$$

Домашнее задание 09

Задача 9.11. Пусть η_0 — отношение концентрации молекул водорода к концентрации молекул азота вблизи поверхности Земли, а η — то же отношение на высоте $h = 3000$ м. Найти отношение η/η_0 при $T = 280$ К, полагая, что температура и ускорение свободного падения не зависят от высоты.

Решение:

$$n_{H_2}(h) = n_{H_2}(0)\exp\left(-\frac{M_1 gh}{RT}\right)$$
$$n_{N_2}(h) = n_{N_2}(0)\exp\left(-\frac{M_2 gh}{RT}\right)$$

где $M_1 = 0.002$ кг/моль — молярная масса водорода, $M_2 = 0.028$ кг/моль — азота.

Запишем отношение концентраций на высоте h:

$$\eta = \frac{n_{H_2}(h)}{n_{N_2}(h)} = \frac{n_{H_2}(0)\exp\left(-\frac{M_1 gh}{RT}\right)}{n_{N_2}(0)\exp\left(-\frac{M_2 gh}{RT}\right)} = \eta_0 \exp\left(\frac{(M_2 - M_1)gh}{RT}\right)$$

Выразим искомое отношение η/η_0:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \boxed{\exp\left(\frac{(M_2 - M_1)gh}{RT}\right)} \approx 1.39$$

Задача 9.12. В очень высоком вертикальном цилиндрическом сосуде находится углекислый газ при некоторой температуре T. Считая поле тяжести однородным, найти, как изменится давление газа на дно сосуда, если температуру газа увеличить в n раз.

Решение:
Давление газа на дно сосуда $p_0 = n_0 kT$.

Чтобы найти n_0, запишем выражение для полного числа молекул газа N в цилиндре с площадью сечения S:

$$N = \int_0^{+\infty} n(h) S dh = \int_0^{+\infty} n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) S dh$$

$$N = n_0 S \left[-\frac{kT}{mg}\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)\right]_0^{+\infty} = n_0 S \frac{kT}{mg}$$

$$n_0 = \frac{Nmg}{SkT}$$

$$\boxed{p_0 = \left(\frac{Nmg}{SkT}\right) kT = \frac{Nmg}{S}}$$

То есть давление **не изменится** от нагревания

Задача 9.13. Азот находится в очень высоком сосуде в однородном поле тяжести при температуре T. Температуру увеличили в n раз. На какой высоте h концентрация молекул осталась прежней?

Решение:
Из 9.12 $n_0 = \frac{Nmg}{SkT}$. Тогда концентрация на высоте h:

$$n(h, T) = \frac{Nmg}{SkT}\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

По условию концентрация на искомой высоте h не изменилась при увеличении температуры от T до nT:

$$n(h, T) = n(h, nT)$$

$$\frac{Nmg}{SkT}\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = \frac{Nmg}{SknT}\exp\left(-\frac{mgh}{nkT}\right)$$

$$\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{mgh}{nkT}\right)$$

$$n = \exp\left(\frac{mgh}{kT} - \frac{mgh}{nkT}\right) = \exp\left[\frac{mgh}{kT}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = \exp\left(\frac{mgh(n-1)}{nkT}\right)$$

Прологарифмируем обе части уравнения:

$$\ln n = \frac{mgh(n-1)}{nkT} \implies \boxed{h = \frac{n}{n-1}\frac{kT}{mg}\ln n}$$

Задача 9.14. Исходя из условий задачи 9.02, найти: а) число молекул с потенциальной энергией $(U, U + dU)$; б) наиболее вероятное значение потенциальной энергии.

Решение:
а) Число молекул с энергией $(U, U + dU)$**:**
Из задачи 9.02 мы знаем, что число молекул в сферическом слое толщиной dr равно:

$$dN = 4\pi n_0 r^2 \exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) dr$$

$$r = \sqrt{\frac{U}{a}} = a^{-1/2} U^{1/2}$$

$$dr = \frac{1}{2} a^{-1/2} U^{-1/2} dU = \frac{dU}{2\sqrt{aU}}$$

$$dN_U = 4\pi n_0 \left(\frac{U}{a}\right)\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)\frac{dU}{2\sqrt{aU}} = \boxed{2\pi n_0 a^{-3/2}\sqrt{U}\exp\left(-\frac{U}{kT}\right) dU}$$

б) Наиболее вероятное значение потенциальной энергии:
Вероятность найти молекулу с энергией U:

$$f(U) = \sqrt{U}\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$$

Чтобы найти наиболее вероятную энергию $U_{\text{вер}}$, найдем максимум этой функции:

$$\frac{df}{dU} = \frac{1}{2\sqrt{U}}\exp\left(-\frac{U}{kT}\right) + \sqrt{U}\left(-\frac{1}{kT}\right)\exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{U}} - \frac{\sqrt{U}}{kT} = 0 \implies \frac{1}{2\sqrt{U}} = \frac{\sqrt{U}}{kT} \Leftrightarrow 2U = kT \implies \boxed{U_{\text{вер}} = \frac{kT}{2}}$$

Задача 9.15. Система состоит из N квантовых осцилляторов, у каждого из которых есть всего три уровня энергии: E_0, $2E_0$ и $3E_0$. Найти долю осцилляторов, находящихся в состоянии с энергией $2E_0$ при температуре T.

Примечание: число осцилляторов на уровне с энергией E подчиняется распределению Больцмана: $N_E = A\exp(-E/kT)$. Вместо E в нашем случае подставляется энергия конкретного уровня: E_0, $2E_0$ или $3E_0$. Коэффициент A находится из условия, что в сумме на всех трёх уровнях должно быть N осцилляторов.

Решение:
Согласно примечанию к задаче, число осцилляторов на каждом энергетическом уровне определяется распределением Больцмана:

$$N_1 = A\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right) \quad N_2 = A\exp\left(-\frac{2E_0}{kT}\right) \quad N_3 = A\exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = A\left[\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{2E_0}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right)\right]$$

$$\boxed{\frac{N_2}{N} = \frac{\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{2E_0}{kT}\right)}}$$

Задача 9.16. Найти, какая доля молекул азота имеет скорости в интервале от 0 до наиболее вероятной, температура 300 К. Как изменится эта доля при понижении температуры до 200 К? При повышении температуры до 400 К?

Решение:

Доля молекул:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_0^{v_{\text{вер}}} F(v)dv = \int_0^{v_{\text{вер}}} 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv$$

Чтобы вычислить этот интеграл, введем безразмерную переменную $x = \frac{v}{v_{\text{вер}}}$, где $v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Тогда $v = x \cdot v_{\text{вер}}$ и $dv = v_{\text{вер}}dx$. Пределы интегрирования: при $v = 0 \implies x = 0$; при $v = v_{\text{вер}} \implies x = 1$.

Подставим замену в интеграл:

$$\frac{\Delta N}{N} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 x^2 e^{-x^2}dx} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0.18946 \approx 2.2567 \cdot 0.18946 \approx 0.428 \text{ (или 42.8\%)}$$

От изменения T доля не поменяется, так как $\frac{\Delta N}{N}$ не зависит от T.

Задача 9.17. Какая доля молекул азота имеет проекцию скорости v_x в интервале $\left[-\sqrt{\frac{kT}{m}}, +\sqrt{\frac{kT}{m}}\right]$? В интервале $\left[-2\sqrt{\frac{kT}{m}}, +2\sqrt{\frac{kT}{m}}\right]$? В интервале $\left[-3\sqrt{\frac{kT}{m}}, +3\sqrt{\frac{kT}{m}}\right]$? Температура, для определенности, пусть будет 300 К. Проверить, изменится ли результат, если температуру увеличить в 2 раза. Что такое $\sqrt{\frac{kT}{m}}$ с точки зрения распределения Пуассона?

Решение:

Запишем одномерную функцию распределения Максвелла для проекции скорости v_x:

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) = \left|\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}}\right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v_x^2}{2\sigma^2}\right)$$

σ это среднеквадратическое отклонение. Доля молекул **не изменится**. Если перейти к безразмерной скорости $x = v_x/\sigma$, температура T полностью сократится как из подынтегральной функции, так и из фиксированных пределов интегрирования ([-1, 1], [-2, 2], [-3, 3]).

1. В интервале $[-\sigma, \sigma]$ (от $-\sqrt{kT/m}$ до $+\sqrt{kT/m}$) находится:

$$\boxed{\int_{-\sigma}^{\sigma}\varphi(v_x)dv_x \approx 0.6827 \quad \text{(или 68.3\%)}}$$

2. В интервале $[-2\sigma, 2\sigma]$ находится:

$$\boxed{\int_{-2\sigma}^{2\sigma}\varphi(v_x)dv_x \approx 0.9545 \quad \text{(или 95.5\%)}}$$

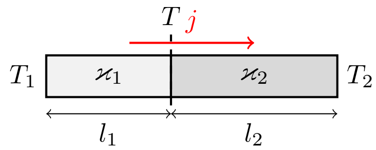
3. В интервале $[-3\sigma, 3\sigma]$ находится практически всё распределение:

$$\boxed{\int_{-3\sigma}^{3\sigma}\varphi(v_x)dv_x \approx 0.9973 \quad \text{(или 99.7\%)}}$$

Семинар 10. Явления переноса

Задача 10.01. Один конец стержня, заключенного в теплоизолирующую оболочку, поддерживается при температуре T_1, а другой конец — при температуре T_2. Сам стержень состоит из двух частей, длины которых l_1 и l_2 и теплопроводности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Найти температуру поверхности соприкосновения этих частей стержня.

Решение:

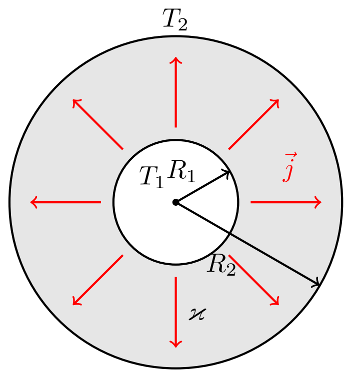


$j = -\varkappa\frac{dT}{dx}$, перенесся все от dT в другую сторону получаем $\frac{-jdx}{\varkappa_1} = dT$, тогда справедлива система $\begin{cases}\int_0^{l_1}\frac{jdx}{\varkappa_1} = \int_T^{T_1}dT\\ \int_0^{l_2}\frac{jdx}{\varkappa_2} = \int_{T}^{T_2}dT\end{cases}$, тогда $j = \frac{(T_1-T)\varkappa_1}{l_1} = \frac{(T-T_2)\varkappa_2}{l_2}$

$$\boxed{T = \frac{T_2\varkappa_2 l_1 + T_1\varkappa_1 l_2}{\varkappa_2 l_1 + \varkappa_1 l_2}}$$

Задача 10.02. Найти распределение температуры и поток тепла на единицу площади в пространстве между двумя концентрическими сферами с радиусами R_1 и R_2, заполненном однородным теплопроводящим веществом, если температуры сфер равны T_1 и T_2.

Решение:



Пусть $A = -\varkappa S\frac{dT}{dr} = \varkappa\frac{4\pi r^2 dT}{dr}$ это полный тепловой поток, который нам предстоит найти. Разобьем дифференциалы на разные стороны и интегрируем.

$$\int_{T_1}^{T} dT = -\int_{R_1}^{r}\frac{Adr}{4\pi r^2\varkappa}$$

То есть $T = T_1 + \frac{A}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)$, это соотношение выполнено для любого $T(r)$, значит и для T_2, тогда $A = \frac{(T_2-T_1)4\pi\varkappa}{1/R_1 - 1/R_2}$, подставим в формулу $T(r)$:

$$\boxed{T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{(1/R_1 - 1/R_2)}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)}$$

Найдём поток тепла на единицу площади $j(r)$. Для этого разделим полный тепловой поток A на площадь сферы радиуса r, равную $S = 4\pi r^2$:

$$j(r) = \frac{A}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{(T_2 - T_1)4\pi\varkappa}{(1/R_1 - 1/R_2)} = \frac{\varkappa(T_2 - T_1)}{r^2(1/R_1 - 1/R_2)} = \boxed{\frac{\varkappa R_1 R_2(T_1 - T_2)}{r^2(R_2 - R_1)}}$$

Задача 10.03. Постоянный электрический ток течет по проводу, радиус сечения которого R и теплопроводность $\varkappa$. В единице объема провода выделяется тепловая мощность w. Найти распределение температуры в проводе, если установившаяся температура на его поверхности равна T_0.

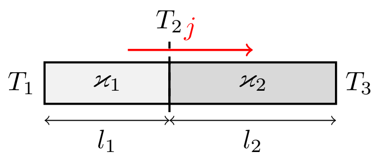
Решение:

Пусть $q = 2\pi rLj = -2\pi rL\varkappa\frac{dT}{dr}$, но с другой стороны это же равно $q = \omega\pi r^2 L$, сократим и интегрируем: $\int_r^R\frac{\omega r dr}{\varkappa} = -2\int_{T_0}^{T}dT$ или $\frac{\omega(R^2-r^2)}{4\varkappa} = T - T_0$, то есть $\boxed{T = T_0 + \frac{\omega(R^2-r^2)}{4\varkappa}}$

Домашнее задание 10

Задача 10.11. Сложены торцами два стержня, длины которых l_1 и l_2, а теплопроводности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Найти теплопроводность однородного стержня длины l_1+l_2, проводящего теплоту так же, как и система из этих двух стержней. Боковые поверхности стержней теплоизолированы.

Решение:



Для каждого стержня, в том числе и их сумме справедливо $j = -\varkappa\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$, тогда для светло-серого (для темно-серого аналогично):

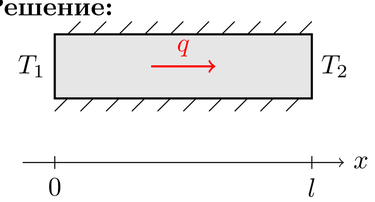
$$\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T = \int_0^{l_1} -\frac{j_1\mathrm{d}x}{\varkappa_1}$$

$$T_2 = T_1 - \frac{j_1 l_1}{\varkappa_1} \quad T_3 = T_2 - \frac{j_2 l_2}{\varkappa_2}$$

Тогда $T_3 = T_1 - \frac{jl_1}{\varkappa} - \frac{jl_2}{\varkappa_2}$, так как $j_1 = j_2 = j$, тепло не теряется. Также знаем, что $T_3 - T_1 = \frac{-j(l_1+l_2)}{\varkappa_{\text{об}}}$, тогда $\frac{jl_1}{\varkappa_1} + \frac{jl_2}{\varkappa_2} = \frac{j(l_1+l_2)}{\varkappa_{\text{об}}}$. $\boxed{\varkappa_{\text{об}} = \varkappa_1\varkappa_2\frac{l_1+l_2}{l_1\varkappa_2+l_2\varkappa_1}}$

Задача 10.12. Стержень длины l с теплоизолированной боковой поверхностью состоит из материала, теплопроводность которого изменяется с температурой по закону $\varkappa = \alpha/T$, где α — постоянная. Торцы стержня поддерживают при температурах T_1 и T_2. Найти зависимость $T(x)$, где x — расстояние от торца с температурой T_1, а также плотность потока тепла.

Решение:



Запишем закон Фурье для одномерного случая:

$$j = -\varkappa\frac{dT}{dx}$$

Подставим $\varkappa = \alpha/T$:

$$j = -\frac{\alpha}{T}\frac{dT}{dx} \implies jdx = -\alpha\frac{dT}{T}$$

Проинтегрируем выражение от левого торца до произвольного состояния.

$$\int_0^x jdx = -\alpha\int_{T_1}^{T(x)}\frac{dT}{T} \implies qx = -\alpha\ln\frac{T(x)}{T_1}$$

Это уравнение справедливо для любой точки стержня, то есть и для правого торца

$$jl = -\alpha\ln\frac{T_2}{T_1} \implies \boxed{j = -\frac{\alpha}{l}\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{\alpha}{l}\ln\frac{T_1}{T_2}}$$

$$\left(-\frac{\alpha}{l}\ln\frac{T_2}{T_1}\right)x = -\alpha\ln\frac{T(x)}{T_1}$$

$$\frac{x}{l}\ln\frac{T_2}{T_1} = \ln\frac{T(x)}{T_1} \implies \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{x/l} = \ln\frac{T(x)}{T_1}$$

$$\frac{T(x)}{T_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{x/l} \implies \boxed{T(x) = T_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{x/l}}$$

Задача 10.13. Пространство между двумя большими горизонтальными пластинами заполнено гелием. Расстояние между пластинами $l = 50$ мм. Нижняя пластина поддерживается при температуре $T_1 = 290$ К, верхняя — при $T_2 = 330$ К. Давление газа близко к нормальному. Найти плотность потока тепла.

Решение:

$$\varkappa = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle\rho c_v = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}\right)\langle v\rangle(mn)c_v = \frac{m\langle v\rangle c_v}{3\sqrt{2}\pi d^2}$$

Так как $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, то теплопроводность зависит от температуры как $\varkappa(T) = \beta\sqrt{T}$, где β — константа. Разделим переменные в законе Фурье: $jdx = -\beta\sqrt{T}dT$.

$$j\int_0^l dx = -\beta\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{T}dT \implies jl = \frac{2}{3}\beta(T_1^{3/2} - T_2^{3/2})$$

Выразим β через значение теплопроводности $\varkappa_1$ при температуре T_1: $\beta = \varkappa_1/\sqrt{T_1}$.

$$j = \boxed{\frac{2\varkappa_1(T_1^{3/2} - T_2^{3/2})}{3l\sqrt{T_1}} = \frac{2\varkappa_1 T_1}{3l}\left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}\right]} \approx 122 \text{ Вт/м}^2$$

Задача 10.14. Найти распределение температуры в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2, заполненном однородным теплопроводящим веществом, если температуры цилиндров равны T_1 и T_2.

Решение:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \implies \varkappa r\frac{dT}{dr} = \text{const} \implies r\frac{dT}{dr} = C_1 \implies dT = C_1\frac{dr}{r}$$

Интегрируем полученное уравнение: $T(r) = C_1\ln r + C_2$ Для нахождения констант C_1 и C_2 используем $T(R_1) = T_1$ и $T(R_2) = T_2$:

$$\begin{cases} T_1 = C_1\ln R_1 + C_2 \\ T_2 = C_1\ln R_2 + C_2 \end{cases} \implies T_2 - T_1 = C_1(\ln R_2 - \ln R_1) \implies C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$T(r) - T_1 = C_1(\ln r - \ln R_1) = C_1\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \implies T(r) = \boxed{T_1 + (T_2 - T_1)\frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}}$$

Задача 10.15. В однородном шаре, радиус которого R и теплопроводность $\varkappa$, выделяется равномерно по объему тепловая мощность с объемной плотностью w. Найти распределение температуры в шаре, если установившаяся температура на его поверхности равна T_0.

Решение:

Уравнение теплопроводности для шара с источником w: $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\varkappa r^2\frac{dT}{dr}\right) = -w$.

Интегрируем: $\varkappa r^2\frac{dT}{dr} = -\frac{wr^3}{3} + C_1$. В центре $(r = 0)$ поток конечен, поэтому $C_1 = 0$.

Интегрируем градиент $\frac{dT}{dr} = -\frac{wr}{3\varkappa}$ второй раз: $T(r) = -\frac{wr^2}{6\varkappa} + C_2$.

Из условия $T(R) = T_0$ находим константу: $C_2 = T_0 + \frac{wR^2}{6\varkappa}$. $\boxed{T(r) = T_0 + \frac{w(R^2 - r^2)}{6\varkappa}}$.

1. Механика и Кинематика

- **Поступательное движение**:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\vec{t}}, \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}, \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

- **Потенциальная энергия и механическая работа**:

$$|\Delta U_{\text{п}}| = A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} \qquad \vec{F} = -\boldsymbol{\nabla} U(x,y,z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

- **Связь линейных и угловых величин:**

$$v = \omega R, \quad a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

- **Вращательное движение**

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = I\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad \vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}] = I\vec{\omega}$$

- **Момент инерции**

$$I = \sum R_i^2 \Delta m = \int r^2 \mathrm{d}m, \quad I = I_C + md^2$$

- **Кинетическая энергия:** $K_1 = \frac{I\omega^2}{2}$, $K_2 = \frac{mv^2}{2}$
- **Угол отклонения грузика на веревке при вращении**: $\tan(\alpha) = \frac{F_{\text{цб}}}{mg} = \frac{\omega^2 l}{g}$
- **Некоторые силы во вращательном движении**:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{\omega}, \quad m\vec{a} = \vec{F} + \underbrace{m\omega^2\vec{R}}_{\vec{F}_{\text{цб}}} + \underbrace{2m[\vec{v}, \vec{\omega}]}_{\vec{F}_K}$$

2. Колебания

- **Гармонические (незатухающие):** $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad v^2(x) = \omega^2(A^2 - x^2)$$

- **Циклическая частота ω_0:**
  - Пружинный маятник: $\omega_0 = \sqrt{\varkappa/m}$
  - Математический маятник: $\omega_0 = \sqrt{g/l}$
  - Физический маятник: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$
- **Затухающие колебания:** $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \quad E(t) = E_0 \exp\left(-2\beta t\right)$$

  где частота с учетом затухания $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$
- **Логарифмический декремент:** $\lambda = \beta T = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)}$
- **Добротность:** $Q = \frac{\pi}{\lambda} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$
- **Уравнение вынужденных колебаний**:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t), \quad x = a\cos(\omega t - \varphi)$$

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \tan(\varphi) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- **Максимум амплитуды смещения**: $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$
- **Формализм Гамильтона**:

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

@K1o0n

Физика 3 модуль. ПМ25

@K1o0n

3. Термодинамика и Изопроцессы

- **Первое начало термодинамики**

$$Q = \Delta U + A \text{ или } \mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A, \quad \mathrm{d}A = p\mathrm{d}V, \quad \mathrm{d}U = \nu C_V T$$

- **Уравнение Менделеева-Клапейрона:**

$$pV = \nu RT = \frac{m}{M}RT, \quad p = nkT$$

- **Уравнение Майера:** $C_p = C_V + R$
- **Адиабатный процесс ($Q = 0$):** $pV^\gamma = \text{const}$
- **Политропный процесс:** $pV^n = \text{const}$
- **Теплоемкость политропного процесса:**

$$C_n = C_V\frac{n-\gamma}{n-1} = C_V\frac{\gamma - n}{1-n} \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$

- **Работа при политропном процессе:**

$$A = \frac{\nu R(T_1 - T_2)}{n-1} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{n-1}$$

- **Энтропия:** $dS = \frac{\delta Q}{T}$, $\quad \Delta S = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + \nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$, $S = k_{\text{Б}}\ln\Omega$

4. Статистические распределения

- **Число ударов молекул газа**: $\nu = (1/4)n\langle v\rangle$
- **Уравнение состояния идеального газа**: $p = nkT$
- **Средняя энергия молекул**: $\langle\varepsilon\rangle = ikT/2$

Функции распределения Максвелла

$$\varphi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

- Наиболее вероятная скорость: $v_{\text{вер}} = \sqrt{2kT/m}$
- Средняя скорость: $\langle v\rangle = \sqrt{8kT/\pi m}$
- Среднеквадратичная скорость: $v_{\text{кв}} = \sqrt{3kT/m}$

Распределение Больцмана:

$$n(r) = n_0\exp\left(-\frac{U(r)}{kT}\right) \quad p(h) = p_0\exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)$$

В случае дискретных уровней

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1}\exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)$$

5. Явления переноса

- **Относительное число молекул газа, пролетающих s без столкновений**

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{s}{\lambda}\right)$$

- **Длина свободного пробега:** $\lambda = 1/(\sqrt{2}\pi d^2 n)$, d — эффективный диаметр

- **Диффузия:** $D = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle, \quad j_m = -D\frac{d\rho}{dx}$
- **Вязкость:** $\eta = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle\rho, \quad \tau = \eta\frac{dv}{dx}$
- **Теплопроводность:** $\varkappa = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle\rho c_v, \quad j = -\varkappa\frac{dT}{dx}$

Уравнение теплопроводности (с источником q_v):

- Одномерное: $\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + q_v$
- Сферическое: $\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q_v$
- Цилиндрическое: $\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + q_v$

6. Разное

Элементы объема dV:

- Сферический слой: $dV = 4\pi r^2 dr$
- Цилиндрический слой: $dV = 2\pi r L dr$
- В пространстве скоростей: $d^3v = 4\pi v^2 dv$

Колебания в потенциальной яме:

- Условие равновесия: $F(x_0) = -U'(x_0) = 0$.
- Устойчивость: $k = U''(x_0) > 0$.
- Частота малых колебаний: $\omega_0 = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$

7. Справочные таблицы

Интеграл	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$ с $a = 1$	$[0, 1]$ с $a = 1$
$\int e^{-ax}dx$	$\frac{1}{a}$	1.00000	0.63212
$\int xe^{-ax}dx$	$\frac{1}{a^2}$	1.00000	0.26424
$\int x^2e^{-ax}dx$	$\frac{2}{a^3}$	2.00000	0.16060
$\int e^{-ax^2}dx$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	0.88623	0.74682
$\int xe^{-ax^2}dx$	$\frac{1}{2a}$	0.50000	0.31606
$\int x^2e^{-ax^2}dx$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$	0.44311	0.18947
$\int x^3e^{-ax^2}dx$	$\frac{1}{2a^2}$	0.50000	0.13212
$\int x^4e^{-ax^2}dx$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$	0.66467	0.10027
$\int x^ne^{-ax}dx$	$\frac{n!}{a^{n+1}}$	$n!$	$n!\left(1 - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$

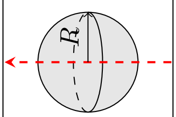
Молекула	i	C_V	$\gamma = C_p/C_V$
Одноатомная	3	$\frac{3}{2}R$	1.67 (5/3)
Двухатомная	5	$\frac{5}{2}R$	1.40 (7/5)
Многоатомная	6	$3R$	1.33 (4/3)

@K1o0n

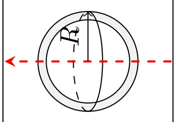
Физика 3 модуль. ПМ25

@K1o0n

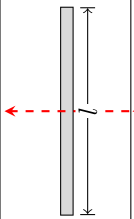
1. Сплошной шар
Ось через центр масс
$I = \frac{2}{5}mR^2$



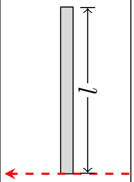
2. Тонкостенная сфера
Ось через центр масс
$I = \frac{2}{3}mR^2$



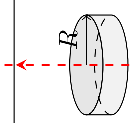
3. Тонкий стержень
Ось через центр перпендикулярно
$I = \frac{1}{12}ml^2$



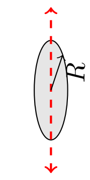
4. Тонкий стержень
Ось через конец перпендикулярно
$I = \frac{1}{3}ml^2$



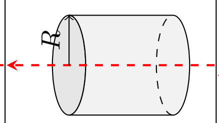
5. Диск
Ось через центр перпендикулярно
$I = \frac{1}{2}mR^2$



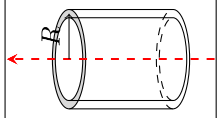
6. Диск
Ось через диаметр (в плоскости)
$I = \frac{1}{4}mR^2$



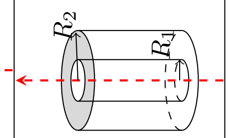
7. Сплошной цилиндр
Ось симметрии
$I = \frac{1}{2}mR^2$



8. Тонкостенный цилиндр
Ось симметрии
$I = mR^2$



9. Толстостенный цилиндр
Ось симметрии
$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$



10. Пластина
Ось через центр перпендикулярно
$I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$